



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-A13

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνονται 100 σημεία μέσα σε έναν κύκλο. Ναδειχθεί ότι μπορούμε να τα χωρίσουμε σε ζεύγη και να συνδέσουμε κάθε ζεύγος με ένα ευθύγραμμο τμήμα ώστε κάθε δύο από τα 50 ευθύγραμμα τμήματα να τέμνονται μέσα στον κύκλο.

Πηγή: Τουρνουά Πόλεων 2012

Προτεινόμενη Λύση

Από όλες τις επιλογές χωρισμού σε ζεύγη, παίρνουμε αυτή όπου το άθροισμα των μηκών των τμημάτων είναι το μέγιστο δυνατό. (Αν υπάρχουν δύο ή περισσότερες τέτοιες επιλογές, παίρνουμε οποιαδήποτε από αυτές.)

Ισχυριζόμαστε ότι αυτή η επιλογή έχει την ζητούμενη ιδιότητα. Έστω προς άτοπο ότι αυτό δεν ισχύει. Άρα υπάρχουν ευθύγραμμα τμήματα AB και CD τα οποία τέμνονται εκτός του κύκλου. Τότε αυτά τα σημεία σχηματίζουν κυρτό τετράπλευρο, έστω το $ABCD$. Τότε οι διαγώνιοι AD και BC τέμνονται σε σημείο E εντός του κύκλου. Όμως

$$AD + BC = (AE + ED) + (BE + EC) = (AE + EB) + (CE + ED) > AB + CD$$

Αυτό είναι άτοπο αφού αν αλλάξουμε τα ευθύγραμμα τμήματα AB, CD με τα AD, BC θα αυξήσουμε και άλλο το άθροισμα των μηκών. **Σχόλια:**