



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-A16
Επιμέλεια: Σωτήρης Λοιζιάς

Πρόβλημα

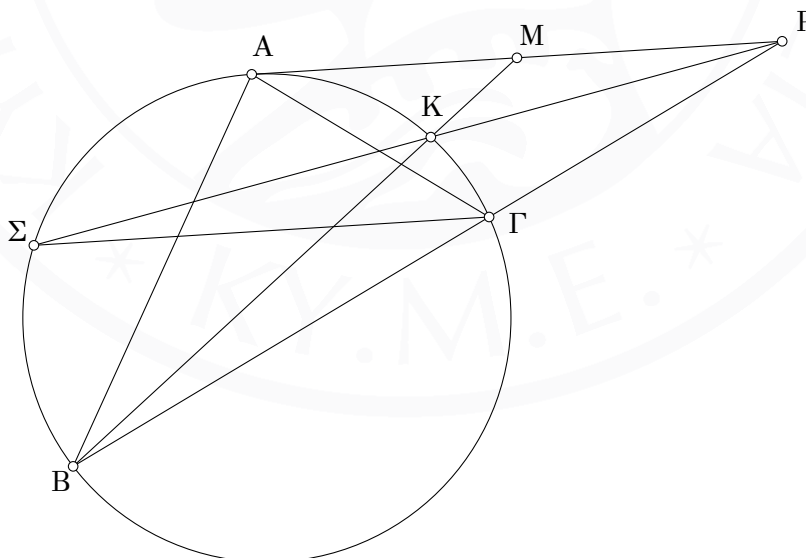
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$. Η εφαπτομένη στο A του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου τέμνει την $B\Gamma$ στο P . Έστω M το μέσο του AP . Η BM τέμνει τον κύκλο στο K και η PK τον τέμνει ξανά στο Σ . Να αποδείξετε ότι $AP \parallel \Gamma\Sigma$.

Πηγή: Βαλκανιάδα Νέων, 2005

Προτεινόμενη Λύση

Το MA είναι εφαπτόμενο τμήμα και η MKB τέμνουσα του κύκλου. Επομένως:

$$MA^2 = MK \cdot MB \quad (1)$$



Το M είναι το μέσο της AP . Έτσι, $MA = MP$. Επομένως, από την (1) έχουμε:

$$MP^2 = MK \cdot MB \Leftrightarrow \frac{MP}{MK} = \frac{MB}{MP} \quad (2)$$

Λόγω της (2) και από το γεγονός ότι η γωνία $\angle BMP$ είναι κοινή, έπεται ότι τα τρίγωνα $\triangle MBP$ και $\triangle MKP$ είναι όμοια. Επομένως:

$$\angle MPK = \angle MBP \quad (3)$$

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\angle KΣΓ = \angle KBΓ, \quad (4)$$

ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Έτσι, από τις (3) και (4) έπεται ότι

$$\angle APΣ = \angle PΣΓ$$

και επειδή βρίσκονται σε εντός εναλλάξ θέση, συμπεραίνουμε τελικά ότι $AP \parallel ΓΣ$.