



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-A18

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να παραγοντοποιηθεί το πολυώνυμο:

$$(x + y + z)^5 - (x^5 + y^5 + z^5)$$

Προτεινόμενη Λύση

Θέτουμε $f(x) = (x + y + z)^5 - (x^5 + y^5 + z^5)$ και παρατηρούμε ότι $f(-y) = 0$. Άρα το $x + y$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου. Ομοίως, τα $y + z, z + x$ είναι επίσης παράγοντες. Επειδή το πολυώνυμο είναι συμμετρικό πολυώνυμο πέμπτου βαθμού, θα έχουμε:

$$f(x) = (x + y)(y + z)(z + x)g(x, y, z)$$

όπου το $g(x, y, z)$ είναι συμμετρικό πολυώνυμο δευτέρου βαθμού. Άρα το g μπορεί να γραφτεί συναρτήσει των στοιχειωδών συμμετρικών πολυωνύμων $x + y + z, xy + yz + zx, xyz$. Επειδή το g είναι δευτέρου βαθμού, πρέπει:

$$g(x, y, z) = A(x + y + z)^2 + B(xy + yz + zx)$$

για κάποιες σταθερές A, B . Δηλαδή:

$$(x + y + z)^5 - (x^5 + y^5 + z^5) = (x + y)(y + z)(z + x)[A(x + y + z)^2 + B(xy + yz + zx)]$$

Θέτοντας $x = y = 1, z = 0$ παίρνουμε $4A + B = 15$, και θέτοντας $x = 2, y = 1, z = 0$ παίρνουμε $9A + 2B = 35$. Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε $A = 5, B = -5$. Άρα:

$$\begin{aligned}(x + y + z)^5 - (x^5 + y^5 + z^5) &= 5(x + y)(y + z)(z + x)[(x + y + z)^2 - (xy + yz + zx)] \\ &= 5(x + y)(y + z)(z + x)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)\end{aligned}$$