



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-A19

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρεθούν όλοι οι πρώτοι p για τους οποίους υπάρχει θετικός ακέραιος n ώστε $5p = \lfloor n^2/5 \rfloor$.

Πηγή: Τουρνουά Harvard-MIT 2018

Προτεινόμενη Λύση

Ο n^2 αφήνει υπόλοιπο 0, 1 ή 4 όταν διαιρεθεί με το 5. Άρα το $\lfloor n^2/5 \rfloor$ ισούται με $n^2/5$ ή με $(n^2 - 1)/5$ ή με $(n^2 - 4)/5$.

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $25p = n^2$. Άρα $n = 5k$ και $p = k^2$, άτοπο.

Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε $25p = n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$. Έχουμε $(n - 1, n + 1) = (n - 1, 2) \leq 2$. Αν $5|n + 1$, τότε $5 \nmid n - 1$. Άρα $25|n + 1$ και άρα $n + 1 = 25$ ή $n + 1 = 25p$ με το δεύτερο να απορρίπτεται αφού τότε $n - 1 = 1$ που οδηγεί σε άτοπο. Αν λοιπόν $5|n - 1$ τότε $n = 24$ και $p = 23$. Ομοίως, αν $5|n - 1$ παίρνουμε $n = 26$ και $p = 27$ το οποίο απορρίπτεται.

Στην τρίτη περίπτωση έχουμε $25p = n^2 - 4 = (n - 2)(n + 2)$. Όπως στην προηγούμενη παράγραφο καταλήγουμε στο $n = 27, p = 29$ και στο $n = 23, p = 21$ το οποίο όμως απορρίπτεται.

Άρα οι μόνοι πρώτοι που ικανοποιούν είναι ο $p = 23$ και ο $p = 29$.