



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-A20
Επιμέλεια: Σωτήρης Λοιζιάς

Πρόβλημα

Σε ένα μη ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ φέρουμε τις διχοτόμους $ΑΛ$ και $ΒΚ$. Η μεσοκάθετος του $ΒΚ$ τέμνει την $ΑΛ$ στο σημείο $Μ$. Η παράλληλη από το σημείο $Λ$ προς τη $ΜΚ$ τέμνει τη $ΒΚ$ στο σημείο $Ν$. Να αποδείξετε ότι $ΝΑ = ΝΛ$.

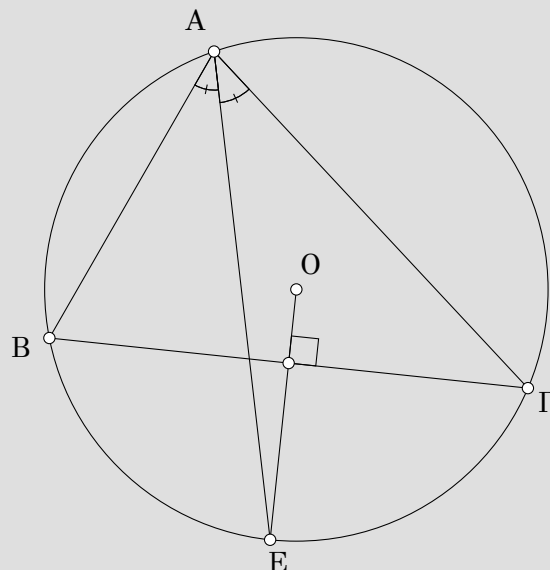
Πηγή: Βαλκανιάδα Νέων, 2010

Προτεινόμενη Λύση

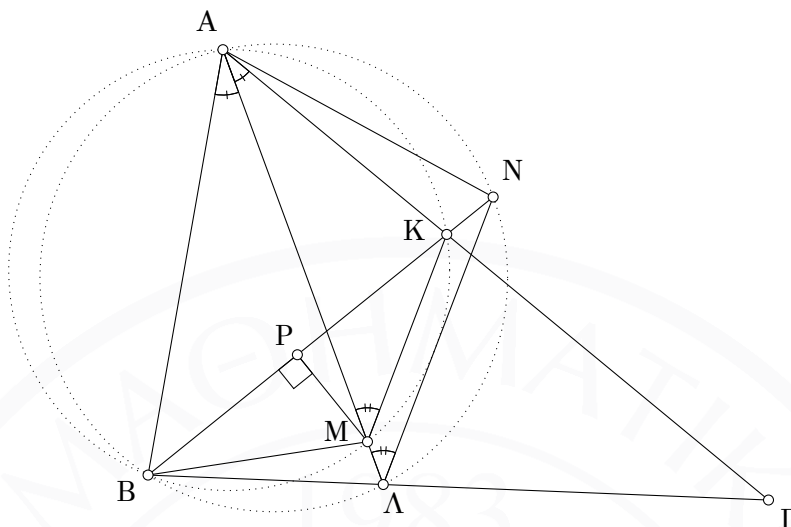
Θα παρουσιάσουμε πρώτα το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα του Νότιου Πόλου

Αν η διχοτόμος της γωνίας $\angle A$ τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ και η μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$ τέμνονται στο σημείο E , τότε το E είναι σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$.



Στο πρόβλημά μας τώρα, στο τρίγωνο $\triangle ABK$ η AM είναι η διχοτόμος της γωνίας $\angle A$. Επειδή η MP είναι μεσοκάθετος του BK , σύμφωνα με το Θεώρημα του Νότιου Πόλου, το σημείο M βρίσκεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $\triangle ABK$.



Έτσι, το τετράπλευρο $ABMK$ είναι εγγράψιμο και:

$$\angle A\Lambda N = \angle AMK = \angle ABK = \angle ABN$$

Αφού $\angle A\Lambda N = \angle ABN$, τότε το τετράπλευρο $AB\Lambda N$ είναι εγγράψιμο. Επειδή η BN είναι η διχοτόμος της γωνίας B , έπεται ότι $\widehat{NA} = \widehat{N\Lambda}$ (στον κύκλο που διέρχεται από τα σημεία A, B, Λ, N) και το ζητούμενο έπεται.

Εναλλακτικά, μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής:

$$\angle \Lambda AN = \angle \Lambda BN = \angle NBA = \angle N\Lambda A = \angle A\Lambda N$$

Αφού $\angle \Lambda AN = \angle A\Lambda N$, τότε το τρίγωνο $\triangle N\Lambda\Lambda$ είναι ισοσκελές, με $NA = N\Lambda$.