



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-A22

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Έστω θετικός ακέραιος n . Ναδειχθεί ότι:

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n+2^{m-1}}{2^m} \right\rfloor + \cdots = n$$

Προτεινόμενη Λύση 1:

Θα το δείξουμε με επαγωγή στο n . Για $n = 1$ είναι άμεσο αφού σε αυτήν την περίπτωση είναι $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = 1$ και $\left\lfloor \frac{n+2^{m-1}}{2^m} \right\rfloor = 0$ για $m \geq 2$.

Για το επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$. Έστω λοιπόν ότι

$$\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+2}{4} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{k+2^{m-1}}{2^m} \right\rfloor + \cdots = k$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\left\lfloor \frac{k+2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+3}{4} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{k+1+2^{m-1}}{2^m} \right\rfloor + \cdots = k+1 \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\left\lfloor \frac{k+1+2^{m-1}}{2^m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k+2^{m-1}}{2^m} \right\rfloor \quad (2)$$

εκτός και αν $2^m | (k+1+2^{m-1})$ στην οποία περίπτωση έχουμε:

$$\left\lfloor \frac{k+1+2^{m-1}}{2^m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k+2^{m-1}}{2^m} \right\rfloor + 1 \quad (3)$$

Όμως:

$$2^m | (k+1+2^{m-1}) \Leftrightarrow k+1 \equiv 2^{m-1} \pmod{2^m} \Leftrightarrow 2^{m-1} | (k+1) \quad \text{αλλά} \quad 2^m \nmid (k+1)$$

Αν λοιπόν γράψουμε $k+1 = 2^r \cdot t$ με t περιττό, τότε βλέπουμε ότι:

$$2^m | (k+1+2^{m-1}) \Leftrightarrow t = m-1$$

Δηλαδή η (2) ισχύει για όλα τα m εκτός όταν $m = t$ στην οποία περίπτωση ισχύει η

(3). Άρα ισχύει η (1) και το επαγωγικό βήμα ολοκληρώθηκε.

Προτεινόμενη Λύση 2:

Πάλι με επαγωγή στο n αλλά με ισχυρή επαγωγή. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι μια πρόταση $P(n)$ ισχύει για κάθε φυσικό n , στο επαγωγικό βήμα της κανονικής επαγωγής, υποθέτουμε το $P(k)$ και αποδεικνύουμε το $P(k+1)$. Στο επαγωγικό βήμα της ισχυρής επαγωγής, υποθέτουμε τα $P(1), P(2), \dots, P(k)$ και αποδεικνύουμε το $P(k+1)$.

Έστω λοιπόν $P(n)$ η πρόταση:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n + 2^{m-1}}{2^m} \right\rfloor = n$$

Η $P(1)$ ισχύει. Ας υποθέσουμε ότι ισχύουν οι $P(1), \dots, P(k)$ και θα δείξουμε ότι ισχύει η $P(k+1)$.

Περίπτωση 1: Αν k άρτιος, έστω $k = 2r$ τότε:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{k+1+2^{m-1}}{2^m} \right\rfloor &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{2r+1+2^{m-1}}{2^m} \right\rfloor \\ &= r+1 + \sum_{m=2}^{\infty} \left\lfloor \frac{2r+1+2^{m-1}}{2^m} \right\rfloor \\ &= r+1 + \sum_{m=2}^{\infty} \left\lfloor \frac{2r+2^{m-1}}{2^m} \right\rfloor \\ &= r+1 + \sum_{m=2}^{\infty} \left\lfloor \frac{r+2^{m-2}}{2^{m-1}} \right\rfloor \\ &= r+1 + \sum_{m'=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{r+2^{m'-1}}{2^{m'}} \right\rfloor \\ &= r+1 + r = 2r+1 = k+1 \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ισχύ του $P(r)$ που επιτρέπεται αφού $r \leq 2r = k$.

Περίπτωση 2: Αν k περιττός, έστω $k = 2r+1$ τότε με παρόμοιο τρόπο έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{k+1+2^{m-1}}{2^m} \right\rfloor &= r+1 + \sum_{m=2}^{\infty} \left\lfloor \frac{2r+2+2^{m-1}}{2^m} \right\rfloor \\ &= r+1 + \sum_{m'=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{r+1+2^{m'-1}}{2^{m'}} \right\rfloor \\ &= r+1 + (r+1) = k+1 \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ισχύ του $P(r+1)$.

Οπότε από την μέθοδο της ισχυρής επαγωγής η πρόταση $P(n)$ ισχύει για κάθε φυσικό n .

Προτεινόμενη Λύση 3:

Είναι απλό ότι $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor$ για κάθε x . (Γράφουμε $x = n + t$ με $0 \leq t < 1$ και ελέγχουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις $0 \leq t < 1/2$ και $1/2 \leq t < 1$.)

Άρα $\left\lfloor \frac{n+2^{m-1}}{2^m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2^{m-1}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^m} \right\rfloor$ και τηλεσκοπικά (δείτε π.χ. την λύση του [OLY2017-A09](#)) παίρνουμε το ζητούμενο.

