



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-A24
Επιμέλεια: Σωτήρης Λοϊζιάς

Πρόβλημα

Ο εγγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ εφάπτεται των πλευρών $B\Gamma, \Gamma A$ και AB στα σημεία M, N και P , αντίστοιχα. Στο τμήμα PN παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε

$$\frac{\Delta P}{\Delta N} = \frac{BP}{\Gamma N}.$$

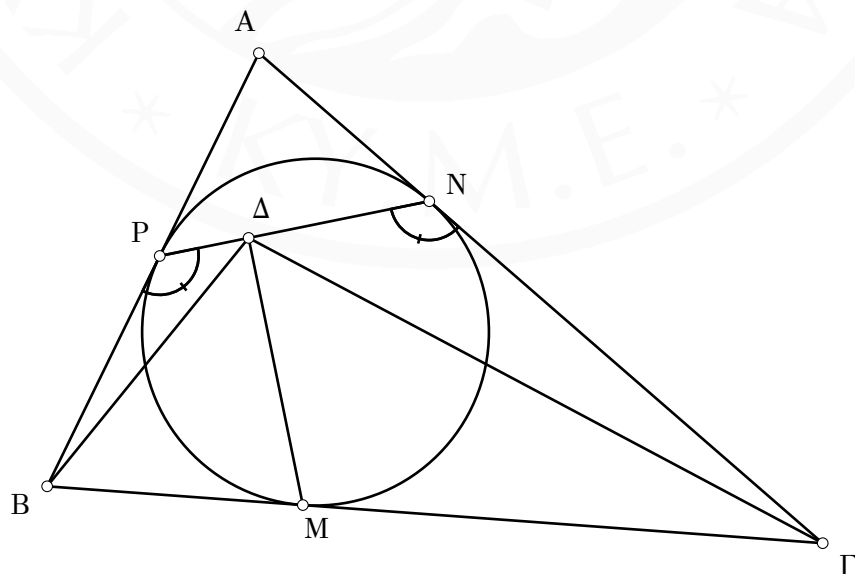
Να αποδείξετε ότι $\Delta M \perp PN$.

Πηγή: Βαλκανιάδα Νέων, Shortlist, 2007

Προτεινόμενη Λύση

Έχουμε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα AP και AN ισούνται. Επομένως, $\angle APN = \angle ANP$ και:

$$\angle BPD = \angle \Gamma N\Delta \quad (1)$$



Επιπλέον, αφού ισχύει ότι

$$\frac{\Delta P}{\Delta N} = \frac{BP}{\Gamma N},$$

τότε τα τρίγωνα ΔPBA και $\Delta N\Delta\Gamma$ είναι όμοια.Επομένως,

$$\angle P\Delta B = \angle N\Delta\Gamma \quad (2)$$

και:

$$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{BP}{\Gamma N} = \frac{BM}{\Gamma M} \quad (3)$$

Από την (3), συμπεραίνουμε ότι στο τρίγωνο $\Delta \Delta B\Gamma$, η ΔM είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle B\Delta\Gamma$. Επειδή $\angle B\Delta P = \angle \Gamma\Delta N$ και $\angle B\Delta M = \angle \Gamma\Delta M$, τότε $\Delta M \perp PN$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται.