



Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία
Στασίνου 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003, Λευκωσία
Τηλέφωνο: 357 – 22378101, Φαξ: 357 – 22379122
cms@cms.org.cy, www.cms.org.cy

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-A25

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνεται ένα υποσύνολο A του $\{1, 2, \dots, 169\}$ το οποίο περιέχει 84 στοιχεία. Επίσης, δεν υπάρχουν δύο στοιχεία που να ανήκουν στο A και να έχουν άθροισμα 169.

Ναδειχθεί ότι το A περιέχει τουλάχιστον ένα τέλειο τετράγωνο.

Πηγή: Διαγωνισμός Βαλτικών χωρών 2008

Προτεινόμενη Λύση

Αν $25 \in A$ ή $144 \in A$ ή $169 \in A$ τότε τελειώσαμε. Σε διαφορετική περίπτωση, χωρίζουμε το $\{1, 2, \dots, 169\} \setminus \{25, 144, 169\}$ στα πιο κάτω 83 υποσύνολα:

$$\{1, 168\}, \{2, 167\}, \dots, \{24, 145\}, \{26, 143\}, \dots, \{84, 85\}$$

Αφού το A έχει 84 στοιχεία, από την αρχή του περιστερώνα (δείτε την λύση του [OLY2017-A12](#)) ένα από τα πιο πάνω υποσύνολα θα περιέχει δύο στοιχεία του A . Τότε όμως πάλι παίρνουμε το ζητούμενο αφού τα άθροισμα των δύο στοιχείων κάθε ενός από τα πιο πάνω υποσύνολα ισούται με 169.