



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-A26

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύουν οι σχέσεις

$$f(x + 19) \leq f(x) + 19 \quad \text{και} \quad f(x + 94) \geq f(x) + 94$$

Να δειχθεί ότι $f(x + 1) = f(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πηγή: Αυστροπολωνικός Διαγωνισμός 1994

Προτεινόμενη Λύση

Έχουμε $f(x + 38) = f((x + 19) + 19) \leq f(x + 19) + 19 \leq f(x) + 38$. Με παρόμοιο τρόπο, βρίσκουμε επαγωγικά ότι $f(x + 19n) \leq f(x) + 19n$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επειδή $5 \cdot 19 = 95$, παίρνουμε:

$$f(x + 95) \leq f(x) + 95 \leq f(x + 94) + 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $t \in \mathbb{R}$, θέτοντας $x = t - 94$, παίρνουμε $f(t + 1) \leq f(t) + 1$.

Μένει να δείξουμε και την ανάποδη ανισότητα. Όπως και πριν έχουμε επίσης ότι:

$$f(x + 94m) \geq f(x) + 94m$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε ότι (δείτε στα σχόλια για το πως το σκεφτήκαμε) $18 \cdot 94 - 89 \cdot 19 = 1692 - 1691 = 1$. Άρα:

$$f(x + 1692) \geq f(x) + 18 \cdot 94 = f(x) + 89 \cdot 19 + 1 \geq f(x + 1691) + 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $t \in \mathbb{R}$, θέτοντας $x = t - 1691$, παίρνουμε $f(t + 1) \geq f(t) + 1$.

Οπότε το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Σχόλια

Ένα βασικό συστατικό του πρώτου μισού κομματιού της λύσης ήταν το γεγονός ότι $5 \cdot 19 - 94 = 1$. Για την ανάποδη ανισότητα υποψιαζόμαστε ότι θέλουμε μια σχέση της μορφής $94m - 19n = 1$ όπου m, n φυσικοί. Για να βρούμε τέτοιους m, n εργαζόμαστε ως εξής:

$$1 = 5 \cdot 19 - 94 = 5 \cdot 19 - 19 \cdot 94 + 19 \cdot 94 - 94 = (5 - 94) \cdot 19 + (19 - 1) \cdot 94 = 18 \cdot 94 - 89 \cdot 19$$

Παρατηρήστε επίσης ότι επειδή οι 19 και 94 είναι πρώτοι μεταξύ τους, από το Λήμμα του Bezout (το οποίο έχουμε δει στην λύση του [OLY2017-A22](#)) υπάρχουν ακέραιοι r, s ώστε $19r + 94s = 1$. (Προφανώς ο ένας από τους r, s είναι θετικός και ο άλλος αρνητικός.)

