



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-A27

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνεται θετικός ακέραιος n . Να βρεθεί ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των $n! + 1$ και $(n + 1)!$.

Προτεινόμενη Λύση

Αν ο $n + 1$ είναι σύνθετος, τότε κάθε πρώτος διαιρέτης του $(n + 1)!$ διαιρεί κάποιον από τους $1, 2, \dots, n$ και άρα είναι και διαιρέτης του $n!$. Τότε όμως δεν θα είναι διαιρέτης του $n! + 1$. Άρα σε αυτήν την περίπτωση είναι $\text{ΜΚΔ}(n! + 1, (n + 1)!) = 1$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο $n + 1$ είναι πρώτος. Έστω $n + 1 = p$. Ακριβώς το ίδιο επιχείρημα όπως στην πιο πάνω παράγραφο δείχνει ότι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των $(p - 1)! + 1$ και $p!$ πρέπει (είτε να ισούται με 1, είτε) να είναι δύναμη του p . Από το Θεώρημα Wilson έχουμε $p \mid (p - 1)! + 1$. Επίσης $p^2 \nmid p!$. Άρα σε αυτήν την περίπτωση είναι $\text{ΜΚΔ}(n! + 1, (n + 1)!) = p = n + 1$.

Σχόλιο

Θεώρημα Wilson

Έστω πρώτος αριθμός p . Τότε $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$.