



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-A28

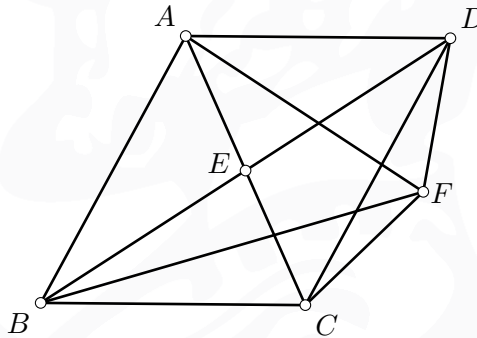
Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου $ABCD$ τέμνονται στο σημείο E . Οι διχοτόμοι των γωνιών $\angle DAE$ και $\angle EBC$ τέμνονται στο σημείο F . Αν το $ECFD$ είναι παραλληλόγραμμο, να βρεθεί ο λόγος $AB : AD$

Πηγή: Διαγωνισμός Βαλτικών Χωρών 2015

Προτεινόμενη Λύση



Αφού το $ECFD$ είναι παραλληλόγραμμο (αν και δεν φαίνεται στο σχήμα μας) τότε $\angle CFB = \angle EBF$. Όμως η BF είναι διχοτόμος της $\angle EBC$ άρα έχουμε και $\angle EBF = \angle FBC$. Οπότε είναι $\angle CFB = \angle FBC$, δηλαδή το τρίγωνο BCF είναι ισοσκελές με $BC = CF$. Από το παραλληλόγραμμο $ECFD$ έχουμε επίσης ότι $CF = ED$ άρα και $BC = ED$. Ομοίως παίρνουμε και $AD = EC$. Όμως $BC = AD$ άρα και $EC = ED$. Στο παραλληλόγραμμο $ABCD$ οι διαγώνιοι διχοτομούνται και αφού $EC = ED$, οι διαγώνιοι είναι ίσες. Άρα το $ABCD$ είναι ορθογώνιο.

Γνωρίζουμε ότι $ED = EC = EA$ και $EC = AD$ άρα το τρίγωνο ADE είναι ισόπλευρο. Έχουμε λοιπόν $\angle ADE = 60^\circ$ που δίνει $\frac{AB}{AD} = \varepsilon\phi(60^\circ) = \sqrt{3}$.