



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-B03

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Έστω σύνολο θετικών ακεραίων A ώστε αν $x, y \in A$ με $x \neq y$, τότε $|x - y| \geq \frac{xy}{25}$. Να βρεθεί το μέγιστο δυνατό μέγεθος του A .

Πηγή: IMO Longlist 1985

Προτεινόμενη Λύση

Έστω $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ τα στοιχεία του A . Για i, j με $1 \leq i < j \leq 25$ έχουμε $a_j - a_i \geq \frac{a_i a_j}{25}$ που δίνει:

$$\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_j} \geq \frac{1}{25}$$

Άρα για κάθε k με $1 \leq k \leq 24$ έχουμε:

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{a_k} > \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_n} = \sum_{i=k}^{n-1} \left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}} \right) \geq \frac{n-k}{25}$$

Για $k = 5$, παίρνουμε $\frac{1}{5} < \frac{n-5}{25}$ που δίνει $n < 10$, και άρα $n \leq 9$.

Για να δείξουμε ότι το $n = 9$ λαμβάνεται, αρκεί να βρούμε θετικούς ακεραίους $a_1 < a_2 < \dots < a_9$ ώστε $\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}} \geq \frac{1}{25}$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$. Πράγματι τότε θα έχουμε και $\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_j} \geq \frac{1}{25}$ για κάθε i, j με $1 \leq i < j \leq 9$ που είναι ισοδύναμο με την αρχική συνθήκη.

Θέτουμε $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 5$. Μετά θέλουμε $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \geq \frac{1}{25}$ που δίνει $a_6 \geq \frac{25}{4}$. Μπορούμε να πάρουμε $a_6 = 7$. Με παρόμοιο τρόπο καταλήγουμε στο ότι το σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 17, 54\}$ ικανοποιεί την συνθήκη και έχει 9 στοιχεία.

Σχόλια

Το πρώτο βήμα της λύσης ήταν η διάταξη των στοιχείων του A . Η διάταξη των στοιχείων βοηθάει συχνά σε προβλήματα συνδυαστικής.

Ένα άλλο βασικό κλειδί της λύσης ήταν η μετατροπή της ανισότητας $a_j - a_i \geq \frac{a_i a_j}{25}$ στην

ανισότητα $\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_j} \geq \frac{1}{25}$. Η δεύτερη ανισότητα ήταν αυτή που μας επέτρεψε να βρούμε καλά φράγματα για τα $1/a_k$.

Η επιλογή $k = 5$ δεν ήταν τυχαία. Η ανισότητα που είχαμε είναι ισοδύναμη με την $n < \frac{k^2+25}{k}$. Θέλουμε να επιλέξουμε το k με τέτοιο τρόπο ώστε το $\frac{k^2+25}{k}$ να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο. Αλλά από Cauchy-Schwarz έχουμε $\frac{k^2+25}{k} \geq \frac{10k}{k} = 10$ με την ισότητα να ισχύει όταν $k = 5$.

