



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-B04

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να λυθεί το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 + \frac{6x_1^2}{x_1^2 + \cdots + x_{10}^2} \\&\vdots \\x_{10} &= 1 + \frac{6x_{10}^2}{x_1^2 + \cdots + x_{10}^2}\end{aligned}$$

Πηγή: Καναδάς 2016

Προτεινόμενη Λύση

Προσθέτοντας όλες τις εξισώσεις παίρνουμε $x_1 + \cdots + x_{10} = 16$. Θέτουμε:

$$S = \frac{x_1^2 + \cdots + x_{10}^2}{6}$$

Τότε κάθε x_i είναι λύση της εξίσωσης $x = 1 + x^2/S$ ή ισοδύναμα της εξίσωσης $x^2 - Sx + S = 0$. Επομένως τα x_i μπορούν να πάρουν το πολύ δύο τιμές, έστω τις a, b . Πρέπει $a + b = ab = S$. Ας υποθέσουμε ότι k από τα x_i παίρνουν την τιμή a , και $10 - k$ παίρνουν την τιμή b . Άρα:

$$ka + (10 - k)b = 16 \quad \text{και} \quad a + b = ab = S = \frac{ka^2 + (10 - k)b^2}{6}$$

Από Cauchy-Schwarz έχουμε:

$$6S = ka^2 + (10 - k)b^2 \geq 2ab\sqrt{k(10 - k)}$$

Πρέπει $S \neq 0$ αφού αλλιώς το σύστημα δεν έχει νόημα. Άρα $3 = \sqrt{k(10 - k)}$ που δίνει $(k - 1)(k - 9) \geq 0$. Επομένως $k \in \{0, 1, 9, 10\}$. Από συμμετρία μπορούμε να υποθέσουμε ότι $k = 0$ ή $k = 1$.

Για $k = 0$, έχουμε $10b = 16$, άρα $b = 8/5$ και παίρνουμε την λύση $x_1 = \cdots = x_{10} = \frac{8}{5}$.

Είναι απλό ότι η λύση ικανοποιεί το σύστημα.

Για $k = 1$, έχουμε ισότητα στην εφαρμογή της Cauchy-Schwarz. Άρα $ka^2 = (10 - k)b^2$, το οποίο για $k = 1$ δίνει $a = 3b$. Τότε $16 = a + 9b = 12b$ που δίνει $b = \frac{4}{3}$ και άρα $a = 4$. Οπότε παίρνουμε την λύση $x_1 = 4, x_2 = \dots = x_{10} = \frac{4}{3}$ καθώς και τις μεταθέσεις της. Είναι απλό ότι και αυτές οι λύσεις ικανοποιούν το σύστημα.

