



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-B06

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρεθούν όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (a, b) για τα οποία υπάρχουν τρεις διαδοχικοί ακέραιοι στους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = \frac{x^5+a}{b}$ παίρνει ακέραιες τιμές.

Πηγή: Ευρωπαϊκή Ολυμπιάδα Κοριτσιών 2013

Προτεινόμενη Λύση

Προφανώς όλα τα ζεύγη της μορφής $(n, 1)$ όπου n θετικός ακέραιος ικανοποιούν το ζητούμενο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $b > 1$. Πρέπει ο b να είναι περιττός αφού στους ακεραίους το $x^5 + a$ παίρνει εναλλάξ άρτιες και περιττές τιμές.

Έστω ότι το $P(x)$ παίρνει ακέραιες τιμές στους $n-1, n, n+1$. Έστω q μια δύναμη πρώτου η οποία διαιρεί τον b . Τότε:

$$(n-1)^5 \equiv n^5 \equiv (n+1)^5 \equiv -a \pmod{q}$$

Πρέπει λοιπόν

$$(n+1)^5 - n^5 = 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 \equiv 0 \pmod{q} \quad (1)$$

και

$$n^5 - (n-1)^5 = 5n^4 - 10n^3 + 10n^2 - 5n + 1 \equiv 0 \pmod{q} \quad (2)$$

Αφαιρώντας την (2) από την (1), παίρνουμε:

$$20n^3 + 10n \equiv 0 \pmod{q} \quad (3)$$

Δεν μπορούμε να έχουμε $q|n$ αφού τότε η (1) θα έδινε $1 \equiv 0 \pmod{q}$, άτοπο. Αφού το q είναι δύναμη πρώτου, πρέπει $(q, n) = 1$. Για παρόμοιο λόγο πρέπει επίσης $(5, q) = 1$. Αφού ο q είναι περιττός καταλήγουμε στο ότι $(10n, q) = 1$. Άρα η (3) δίνει $2n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{q}$. Προσθέτοντας τις (1) και (2), και χρησιμοποιώντας την (3) παίρνουμε

$$0 \equiv 20n^4 + 40n^2 + 4 \equiv 5(2n^2)^2 + 20(2n^2) + 4 \equiv -11 \pmod{q}$$

Άρα $q = 11$.

Αφού οποιαδήποτε δύναμη πρώτου διαιρεί τον b ισούται με 11, τότε πρέπει και $b = 11$.

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $2n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{11}$ που δίνει $n \equiv \pm 4 \pmod{11}$. Τότε όμως $n^5 \equiv (\pm 4)^5 \equiv \pm 1 \pmod{11}$ άρα πρέπει $a \equiv \mp 1 \pmod{11}$.

Για $b = 11$ και $a \equiv 1 \pmod{11}$ έχουμε $(-3)^5 \equiv (-4)^5 \equiv (-5)^5 \equiv 1 \pmod{11}$ οπότε οι $P(-3), P(-4), P(-5)$ είναι ακέραιοι. Για $b = 11$ και $a \equiv -1 \pmod{11}$ έχουμε $3^5 \equiv 4^5 \equiv 5^5 \equiv -1 \pmod{11}$ οπότε οι $P(3), P(4), P(5)$ είναι ακέραιοι.

Άρα έχουμε επιπλέον και τα ζεύγη $(11k+1, 11), (11k+10, 11)$ για k μη αρνητικό ακέραιο.

