



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-B08

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε:

$$(f(x) + xy)f(x - 3y) + (f(y) + xy)f(3x - y) = (f(x + y))^2$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Πηγή: Η.Π.Α. 2017

Προτεινόμενη Λύση

Βάζοντας $x = y = 0$ παίρνουμε:

$$f(0)^2 + f(0)^2 = f(0)^2$$

οπότε $f(0) = 0$.

Βάζοντας $x = 0$, και χρησιμοποιώντας ότι $f(0) = 0$ παίρνουμε:

$$f(y)f(-y) = f(y)^2$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Οπότε για κάθε $y \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(y) = 0 \quad \text{ή} \quad f(y) = f(-y) \tag{1}$$

Ισχυριζόμαστε ότι $f(x) = f(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) \neq f(-x)$, θέτοντας $y = x$ στην (1) παίρνουμε $f(x) = 0$, ενώ θέτοντας $y = -x$ στην (1) παίρνουμε $f(-x) = 0$. Αλλά τότε είναι και $f(x) = f(-x)$.

Τώρα θέτουμε $y = -x$ στην αρχική εξίσωση για να πάρουμε:

$$(f(x) - x^2)f(4x) + (f(-x) - x^2)f(4x) = f(0)^2 = 0$$

Αφού όμως $f(x) = f(-x)$ έχουμε $(f(x) - x^2)f(4x) = 0$, οπότε:

$$f(x) = x^2 \quad \text{ή} \quad f(4x) = 0 \tag{2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέτοντας $x = 3y$ στην αρχική εξίσωση παίρνουμε:

$$(f(y) + 3y^2)f(8y) = f(4y)^2$$

Άρα αν $f(8y) = 0$, τότε είναι και $f(4y) = 0$. Εφαρμόζοντας το πιο πάνω δύο φορές έχουμε ότι αν $f(4x) = 0$ τότε $f(x) = 0$. Συνδυάζοντάς το με την (2) έχουμε

$$f(x) = x^2 \quad \text{ή} \quad f(x) = 0 \quad (3)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Περίπτωση 1: Έχουμε $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ο έλεγχος ότι αυτή η συνάρτηση ικανοποιεί την αρχική εξίσωση είναι απλός.

Περίπτωση 2: Υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) \neq x^2$. Θέτουμε $a = 4x$. Αφού $f(0) = 0$, πρέπει $x \neq 0$, και άρα $a \neq 0$. Από την (3) παίρνουμε $f(a) = 0$. Επειδή $f(a) = f(-a)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a > 0$.

Λήμμα: Αν $f(t) = 0$ για κάποιο $t > 0$, τότε $f(s) = 0$ για κάθε $s \in [0, 2t]$.

Απόδειξη λήμματος: Έστω $s \in [0, 3t]$. Θέτουμε $x = (s + t)/4$ και $y = (3t - s)/4$. Είναι $x, y \geq 0$. Άρα

$$f(x + y)^2 = (f(x) + xy)f(x - 3y) + (f(y) + xy)f(3x - y) \geq xyf(3x - y)$$

Αφού όμως $x + y = t$, και $3x - y = s$, παίρνουμε $xyf(s) = 0$. Αφού όμως $xy > 0$, η απόδειξη του λήμματος ολοκληρώθηκε.

Αφού $f(a) = 0$ με $a > 0$, εφαρμόζοντας το λήμμα διαδοχικά, παίρνουμε $f(x) = 0$ για κάθε $x \geq 0$. Αφού όμως είναι και $f(x) = f(-x)$ καταλήγουμε στο ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Προφανώς η συνάρτηση ικανοποιεί την αρχική εξίσωση.

Σχόλιο:

Από την (3), είναι σοβαρό σφάλμα λογικής να συμπεράνουμε απευθείας ότι οι μοναδικές λύσεις είναι η $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Π.χ. μια άλλη συνάρτηση η οποία ικανοποιεί την (3) είναι η

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } |x| < 1 \\ x^2 & \text{αν } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Αλλάζοντας την συνθήκη $|x| < 1$ σε οποιαδήποτε άλλη συνθήκη, μπορούμε να κατασκευάσουμε άπειρες συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την (3).

Αυτό το σφάλμα εμφανίζεται αρκετά συχνά στην επίλυση συναρτησιακών εξισώσεων και πρέπει να το αποφεύγουμε. Συνήθως εμφανίζεται όταν καταλήγουμε σε μια εξίσωση της μορφής

$$f(x)g(x) = 0$$

για κάθε x . Από εδώ, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είτε η f είναι ταυτοτικά

μηδέν είτε η g είναι ταυτοτικά μηδέν. Το μόνο που μπορούμε να συμπεράνουμε είναι ότι για κάθε x είτε $f(x) = 0$ είτε $g(x) = 0$. Μπορεί όμως για κάποια x να έχουμε $f(x) = 0$ αλλά $g(x) \neq 0$ ενώ για κάποια άλλα x να έχουμε $g(x) = 0$ αλλά $f(x) \neq 0$. (Επιτρέπεται βεβαίως να υπάρχουν και κάποια x για τα οποία ισχύει ότι $f(x) = 0$ αλλά και $g(x) = 0$.)

