



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-B09

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

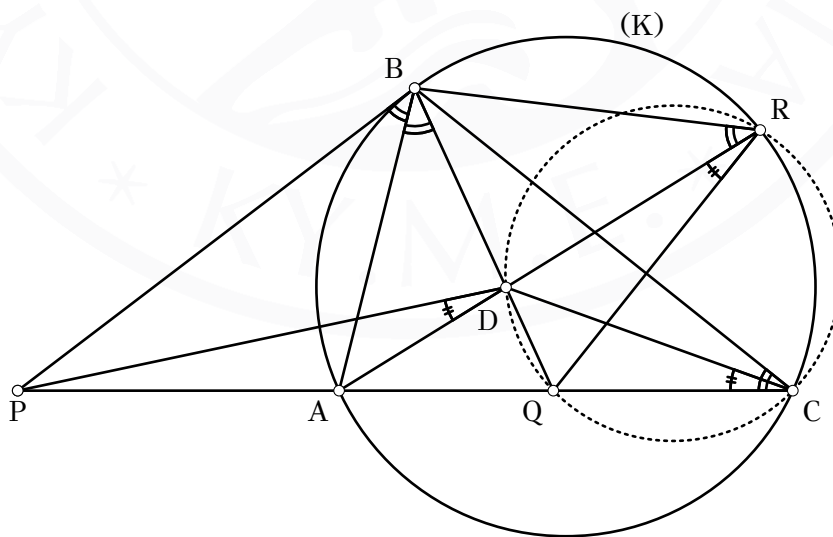
Πρόβλημα

Έστω τρίγωνο ABC όπου $\angle ABC > \angle ACB$. Έστω διαφορετικά σημεία P, Q πάνω στην ευθεία AC ώστε $\angle PBA = \angle QBA = \angle ACB$ με το A να βρίσκεται ενδιάμεσα των P και C . Υποθέτουμε ότι υπάρχει σημείο D στο εσωτερικό του ευθύγραμμου τμήματος BQ ώστε $PD = PB$. Έστω ότι η ευθεία AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του ABC στο σημείο $R \neq A$. Να αποδειχθεί ότι $QB = QR$.

Πηγή: IMO Shortlist 2013

Προτεινόμενη Λύση

Ας συμβολίσουμε με (K) τον περιγεγραμμένο κύκλο του ABC . Επειδή $\angle PBA = \angle ACB$, από το Θεώρημα Χορδής-Εφαπτομένης, η PB είναι εφαπτομένη στον κύκλο (K) . Από δύναμη σημείου προς κύκλο έχουμε $PD^2 = PB^2 = PA \cdot PC$.



Πάλι από δύναμη σημείου προς κύκλο, παίρνουμε ότι η PD είναι εφαπτομένη στον εγγεγραμμένο κύκλο του ADC οπότε από το Θεώρημα Χορδής-Εφαπτομένης έχουμε $\angle PDA = \angle ACD$.

Αφού $\angle ABQ = \angle ACB$ και $\angle QAB = \angle BAC$, τότε είναι και $\angle BQA = \angle CBA$. Επειδή τα A, B, C, R είναι ομοκυκλικά, τότε έχουμε $\angle CBA = \angle CRA$. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\angle CRD = \angle CRA = \angle BQA = \angle DQA = \pi - \angle CQD$$

οπότε τα σημεία C, R, D, Q είναι ομοκυκλικά.

Αφού τα C, R, D, Q είναι ομοκυκλικά, τότε:

$$\angle DRQ = \angle DCQ = \angle DCA = \angle PDA$$

Έστω $\angle ACB = \gamma$ και $\angle PDA = \vartheta$. Επειδή τα A, B, R, C είναι ομοκυκλικά, τότε έχουμε ότι $\angle BRD = \gamma$. Άρα:

$$\angle QRB = \angle QRD + \angle DRB = \vartheta + \gamma$$

και

$$\angle QBR = \angle BDA - \angle BRD = \angle PBD + \vartheta - \gamma = 2\gamma + \vartheta - \gamma = \angle QRB$$

Οπότε όντως $QB = QR$.