



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-B10

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρεθούν όλα τα ζεύγη ακεραίων (x, y) ώστε

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Πηγή: IMO 2006

Προτεινόμενη Λύση

Αν ο x είναι αρνητικός ακέραιος τότε πρέπει $x = 2x+1$ αφού σε διαφορετική περίπτωση το δεξί μέλος θα είναι ακέραιος ενώ το αριστερό όχι. Τότε όμως είναι $x = -1$, οπότε το αριστερό μέλος ισούται με 2. Άρα δεν υπάρχει λύση σε αυτήν την περίπτωση.

Αν $x = 0$, τότε έχουμε $y^2 = 1 + 1 + 2 = 4$ οπότε παίρνουμε τις λύσεις $(0, 2)$ και $(0, -2)$.

Αν $x = 1$, τότε έχουμε $y^2 = 1 + 4 + 32 = 37$, οπότε δεν έχουμε λύση σε αυτήν την περίπτωση.

Έστω τώρα ότι $x \geq 2$. Πρέπει $|y| > 2^x$ αφού $(2^x)^2 = 2^{2x} < 1 + 2^x + 2^{2x+1}$. Ας γράψουμε λοιπόν $|y| = 2^x + m$, όπου m θετικός ακέραιος. Τότε:

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2 = (2^x + m)^2 = 2^{2x} + (2m)2^x + m^2$$

Επομένως:

$$m^2 - 1 = 2^x + 2^{2x} - (2m)2^x = 2^x(1 - 2m + 2^x)$$

Πρέπει λοιπόν $2^x | (m^2 - 1)$. Αφού x θετικός, ο m πρέπει να είναι περιττός. Επίσης, από τους $m - 1$ και $m + 1$ ο ένας θα διαιρείται από τον 2 αλλά όχι από τον 4. Άρα ο άλλος πρέπει να διαιρείται από τον 2^{x-1} .

Άρα $m = k2^{x-1} \pm 1$ για κάποιον θετικό ακέραιο k . Πρέπει $m = 2^{x-1} + 1$. Σε διαφορετική περίπτωση θα είχαμε $m \geq 2^{x-1} + 1$ και $|y| \geq 2^x + 2^{x-1} + 1 = 3 \cdot 2^{x-1} + 1$. Τότε όμως:

$$y^2 = 9 \cdot 2^{2x-2} + 6 \cdot 2^{x-1} + 1 = \frac{9}{8} 2^{2x+1} + 3 \cdot 2^x + 1 > 2^{2x+1} + 2^x + 1$$

Άρα $|y| = 3 \cdot 2^{x-1} - 1$ οπότε:

$$y^2 = 9 \cdot 2^{2x-2} - 6 \cdot 2^{x-1} + 1 = 2^{2x+1} + 2^x + 1$$

Αυτό δίνει:

$$2^{2x-2} = 8 \cdot 2^{x-1} = 2^{x+2}$$

Πρέπει $2x - 2 = x + 2$, δηλαδή $x = 4$ και $|y| = 3 \cdot 2^3 - 1 = 23$.

Οπότε οι μοναδικές λύσεις είναι οι $(0, 2)$, $(0, -2)$, $(4, 23)$ και $(4, -23)$.

