



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-B11

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Θετικοί ακέραιοι $x_1, x_2, \dots, x_n$ (με $n \geq 3$) επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε για κάθε $1 \leq i \leq n$ να είναι

$$\frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{x_i} = k_i$$

όπου k_i ακέραιος και $x_0 = x_n, x_{n+1} = x_1$. Να δειχθεί ότι

$$2n \leq k_1 + k_2 + \dots + k_n < 3n.$$

Πηγή: Ταϊβάν 2014

Προτεινόμενη Λύση

Για την αριστερή ανισότητα παρατηρούμε ότι:

$$k_1 + \dots + k_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{x_{i+1}} + \frac{x_{i+1}}{x_i} \right) \geq 2n$$

από ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου.

Θα δείξουμε με επαγωγή στο n ότι $k_1 + \dots + k_n \leq 3n - 1$. Για $n = 3$ είναι:

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = 2(x_1 + x_2 + x_3)$$

Αν $k_1 = k_2 = k_3 = 2$, τότε ο ισχυρισμός ισχύει. Σε διαφορετική περίπτωση, χωρίς βλάβη της γενικότητας είναι $k_3 = 1$. Τότε $x_3 = x_1 + x_2$ από το οποίο λαμβάνουμε:

$$(k_1 - 1)x_1 = 2x_2 \quad \text{και} \quad (k_2 - 1)x_2 = 2x_1$$

Από αυτό παίρνουμε $(k_1 - 1)(k_2 - 1) = 4$ οπότε $(k_1, k_2) = (3, 3), (2, 5)$ ή $(5, 2)$. Σε όλες τις περιπτώσεις ο ισχυρισμός ισχύει.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_n = \max\{x_1, \dots, x_n\}$. Αν $x_{n-1} = x_n$ τότε $k_{n-1} = 1 + x_{n-2}/x_{n-1}$. Άρα $1 < k_{n-1} \leq 2$ και αφού k_{n-1} ακέραιος, πρέπει $x_{n-2} = x_{n-1}$. Με τον ίδιο τρόπο, επαγωγικά όλα τα x_i πρέπει να είναι ίσα,

οπότε $k_1 + \dots + k_n = 2n \leq 3n - 1$. Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση όπου $x_n = x_1$.

Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $x_{n-1}, x_1 < x_n$. Τότε είναι $k_n = \frac{x_{n-1} + x_1}{x_n} < 2$ οπότε $k_n = 1$, δηλαδή $x_n = x_1 + x_{n-1}$. Επιπλέον, αν κοιτάξουμε την ακολουθία $x_1, \dots, x_{n-1}$, παρατηρούμε ότι εξακολουθεί να ικανοποιεί τις συνθήκες αφο:

$$\frac{x_{n-2} + x_1}{x_{n-1}} = \frac{x_{n-2} + x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}} = k_{n-1} - 1 \quad \text{και} \quad \frac{x_{n-1} + x_2}{x_1} = \frac{x_n - x_1 + x_2}{x_1} = k_1 - 1.$$

Από την επαγωγική υπόθεση είναι:

$$(k_1 - 1) + k_2 + \dots + k_{n-2} + (k_{n-1} - 1) \leq 3(n-1) - 1 = 3n - 4$$

Αφού $k_n = 1$, το ζητούμενο έπεται.

Σχόλια

Στην πιο πάνω λύση βλέπουμε ότι η αρχή ακροτάτου την οποία είδαμε και στο πρόβλημα [OLY2017-B06](#) είναι αρκετά χρήσιμη ακόμη και σε ασκήσεις ανισοτήτων.