



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-B13

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC με $\angle BAC = 30^\circ$. Η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της $\angle ABC$ τέμνουν την AC στα B_1 και B_2 αντίστοιχα. Η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της $\angle ACB$ τέμνουν την AB στα C_1 και C_2 αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε ότι οι κύκλοι με διαμέτρους B_1B_2 και C_1C_2 τέμνονται εσωτερικά του τριγώνου ABC σε σημείο P . Ναδειχθεί ότι $\angle BPC = 90^\circ$.

Πηγή: Ολυμπιάδα Ασίας Ειρηνικού 2011

Προτεινόμενη Λύση

Από τα θεωρήματα διχοτόμων έχουμε:

$$\frac{AB_1}{CB_1} = \frac{AB_2}{CB_2} = \frac{c}{a}$$

όπου με a, b, c δηλώνουμε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ABC . Ο γεωμετρικός τόπος (K) των σημείων X που ικανοποιούν $\frac{AX}{CX} = \frac{c}{a}$ είναι κύκλος (δείτε στα σχόλια). Τα σημεία B_1, B_2 καθώς και το B ανήκουν πάνω στον (K) . Επιπλέον, η $\angle B_1BB_2$ είναι ορθή, άρα η B_1B_2 είναι διάμετρος του (K) . Οπότε το P ανήκει στον (K) και άρα

$$\frac{AP}{CP} = \frac{c}{a}$$

Ισοδύναμα, είναι $a(AP) = c(CP)$. Ομοίως, έχουμε $a(AP) = b(BP)$.

Φέρνουμε τώρα κάθετες από το P στα BC, CA, AB . Έστω D, E, F τα σημεία τομής τους με τις BC, CA, AB . Επειδή οι $\angle PEA$ και $\angle PFA$ είναι ορθές, το τετράπλευρο $AFPE$ είναι εγγράψιμο με διάμετρο AP . Άρα από τον Νόμο των Ημιτόνων έχουμε

$$EF = AP \sin \hat{A} = \frac{a(AP)}{2R}$$

όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC . Ομοίως έχουμε $DF = b(BP)/2R$ και $DE = c(CP)/2R$. Επομένως το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο.

Τώρα με κυνήγι γωνιών έχουμε:

$$\angle BPD = \angle BFD = 120^\circ - \angle AFE$$

και ομοίως $\angle CPD = 120^\circ - \angle AEF$. Άρα

$$\angle BPC = \angle BPD + \angle CPD = 240^\circ - \angle AEF - \angle AFE = 240^\circ - (180^\circ - 30^\circ) = 90^\circ$$

Σχόλια

Απολλώνιος Κύκλος

Δοθέντων δύο σημείων A, B στο επίπεδο και ενός πραγματικού αριθμού $k \neq 1$, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X του επιπέδου που ικανοποιούν $\frac{AX}{BX} = k$ είναι κύκλος ο οποίος ονομάζεται Απολλώνιος κύκλος του τμήματος AB . Το κέντρο του κύκλου ανήκει πάνω στην AB (ή την προέκτασή της).