



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-B13

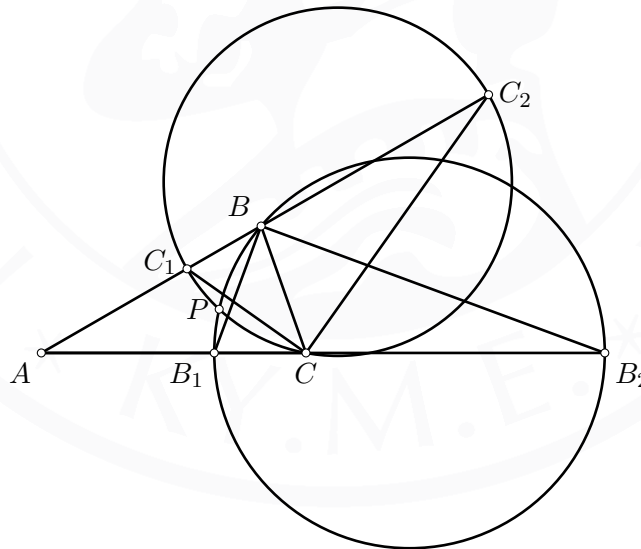
Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC με $\angle BAC = 30^\circ$. Η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της $\angle ABC$ τέμνουν την AC στα B_1 και B_2 αντίστοιχα. Η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της $\angle ACB$ τέμνουν την AB στα C_1 και C_2 αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε ότι οι κύκλοι με διαμέτρους B_1B_2 και C_1C_2 τέμνονται εσωτερικά του τριγώνου ABC σε σημείο P . Ναδειχθεί ότι $\angle BPC = 90^\circ$.

Πηγή: Ολυμπιάδα Ασίας Ειρηνικού 2011

Προτεινόμενη Λύση



Από τα θεωρήματα διχοτόμων έχουμε:

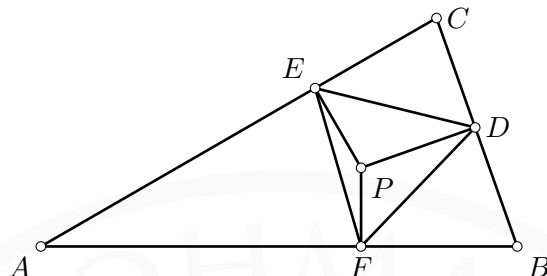
$$\frac{AB_1}{CB_1} = \frac{AB_2}{CB_2} = \frac{c}{a}$$

όπου με a, b, c δηλώνουμε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ABC . Ο γεωμετρικός τόπος (K) των σημείων X που ικανοποιούν $\frac{AX}{CX} = \frac{c}{a}$ είναι κύκλος (δείτε στα σχόλια). Τα σημεία B_1, B_2 καθώς και το B ανήκουν πάνω στον (K) . Επιπλέον, η $\angle B_1BB_2$ είναι

ορθή, άρα η B_1B_2 είναι διάμετρος του (K) . Οπότε το P ανήκει στον (K) και άρα

$$\frac{AP}{CP} = \frac{c}{a}$$

Ισοδύναμα, είναι $a(AP) = c(CP)$. Ομοίως, έχουμε $a(AP) = b(BP)$.



Φέρνουμε τώρα κάθετες από το P στα BC, CA, AB . Έστω D, E, F τα σημεία τομής τους με τις BC, CA, AB . Επειδή οι $\angle PEA$ και $\angle PFA$ είναι ορθές, το τετράπλευρο $AFPE$ είναι εγγράψιμο με διάμετρο AP . Άρα από τον Νόμο των Ημιτόνων έχουμε

$$EF = AP \sin \hat{A} = \frac{a(AP)}{2R}$$

όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC . Ομοίως έχουμε $DF = b(BP)/2R$ και $DE = c(CP)/2R$. Επομένως το τρίγωνο DEF είναι ισόπλευρο.

Τώρα με κυνήγι γωνιών έχουμε:

$$\angle BPD = \angle BFD = 120^\circ - \angle AFE$$

και ομοίως $\angle CPD = 120^\circ - \angle AEF$. Άρα

$$\angle BPC = \angle BPD + \angle CPD = 240^\circ - \angle AEF - \angle AFE = 240^\circ - (180^\circ - 30^\circ) = 90^\circ$$

Σχόλια

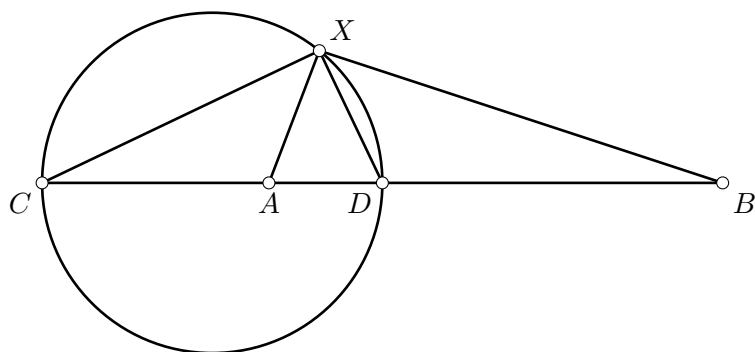
Απολλώνιος Κύκλος

Δοθέντων δύο σημείων A, B στο επίπεδο και ενός θετικού πραγματικού αριθμού $k \neq 1$, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X του επιπέδου που ικανοποιούν $\frac{AX}{BX} = k$ είναι κύκλος ο οποίος ονομάζεται Απολλώνιος κύκλος του τμήματος AB . Το κέντρο του κύκλου ανήκει πάνω στην AB (ή την προέκτασή της).

Για την απόδειξη του πιο πάνω παρατηρούμε αρχικά ότι υπάρχουν μοναδικά σημεία C, D πάνω στην ευθεία AB ώστε $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} = k$. Το ένα, έστω το D είναι ενδιάμεσα των A και B ενώ το άλλο είναι είτε από τη μεριά του A είτε του B ανάλογα με το αν έχουμε $k < 1$ ή $k > 1$.

Θα δείξουμε ότι ο Απολλώνιος κύκλος είναι ο κύκλος (ω) με διάμετρο AB .

Αν $\frac{AX}{BX} = k$, τότε από τα θεωρήματα των διχοτόμων, η XD είναι η εσωτερική διχοτόμος



του τριγώνου AXB και η XC η εξωτερική διχοτόμος. Τότε όμως έχουμε $\angle CXD = 90^\circ$ οπότε το X ανήκει πάνω στον ω .

Έστω ότι $\frac{AX}{BX} < k$ και έστω XC' , XD' η εξωτερική και εσωτερική διχοτόμος αντίστοιχα. Τότε το D' είναι μεταξύ των A και D ενώ το C' είναι μεταξύ των C και A . Τότε όμως το X δεν ανήκει στον ω αφού αλλιώς θα είχαμε $90^\circ = \angle C'XD' < \angle CXD = 90^\circ$. Ομοίως, αν $\frac{AX}{BX} > k$ τότε το X πάλι δεν ανήκει στον ω .

Άρα όντως $\frac{AX}{BX} = k$ αν και μόνο αν το X ανήκει στον ω .