



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ  
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-B14

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Έστω θετικός ακέραιος  $n$ . Ναδειχθεί ότι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των  $1, 2, \dots, n$  και το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των  $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$  ισούνται, αν και μόνο αν ο  $n+1$  είναι πρώτος.

Πηγή: Ρουμανία 1990

Προτεινόμενη Λύση

Ας γράψουμε  $A$  για το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των  $1, 2, \dots, n$  και  $B$  για το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των  $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$ .

Έστω αρχικά ότι ο  $n+1$  δεν είναι πρώτος, και έστω πρώτος  $p$  ο οποίος διαιρεί τον  $n+1$ . Υπάρχει φυσικός  $k$ , ώστε  $p^k \leq n < p^{k+1}$ . Άρα ο  $A$  διαιρείται από τον  $p^k$ . Θα δείξουμε όμως ότι ο  $B$  δεν διαιρείται από τον  $p^k$ .

Από τον τύπο του Legendre (δείτε την λύση στο [OLY2018-A07](#)) η μεγαλύτερη δύναμη του  $p$  η οποία διαιρεί τον διωνυμικό συντελεστή  $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$  ισούται με

$$\sum_{t=1}^k \left[ \left\lfloor \frac{n}{p^t} \right\rfloor - \left( \left\lfloor \frac{m}{p^t} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m}{p^t} \right\rfloor \right) \right] \quad (1)$$

Γράφοντας  $r_1 = r_1(t)$  και  $r_2 = r_2(t)$  για τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των  $m$  και  $n-m$  αντίστοιχα με το  $p^t$ , τότε το

$$\left\lfloor \frac{n}{p^t} \right\rfloor - \left( \left\lfloor \frac{m}{p^t} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m}{p^t} \right\rfloor \right)$$

ισούται με 1 αν  $r_1 + r_2 \geq p^r$  και 0 αν  $r_1 + r_2 < p^r$ . Επειδή όμως  $n \equiv -1 \pmod{p}$ , για  $t=1$  έχουμε  $r_1(1) + r_2(1) \equiv -1 \pmod{p}$  και άρα  $r_1(1) + r_2(1) = p-1$  αφού σίγουρα  $r_1(1) + r_2(1) \leq (p-1) + (p-1) = 2p-2 < p-1$ .

Οπότε στην (1) έχουμε άθροισμα  $k$  όρων, με τουλάχιστον ένα όρο ίσο με 0, και όλους τους άλλους όρους μικρότερους ή ίσους του 1. Οπότε το άθροισμα είναι μικρότερο του  $k$  και άρα ο  $p^k$  δεν διαιρεί τον  $B$ .

Έστω τώρα ότι ο  $n + 1$  είναι πρώτος. Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε  $p \leq n$ , έχουμε  $\nu_p(A) = \nu_p(B)$ . (Με τον συμβολισμό της λύσης του [OLY2018-A07](#).)

Έστω λοιπόν πρώτος  $p$  με  $p \leq n$  και έστω  $p^k \leq n < p^{k+1}$ . Οπότε  $\nu_p(A) = k$  και αρκεί να δείξουμε ότι  $\nu_p(B) = k$ . Από την (1) έχουμε  $\nu_p(B) \leq k$  οπότε αρκεί να βρούμε  $m$  ώστε  $\nu_p\left(\binom{n}{m}\right) = k$ . Από την (1) θέλουμε

$$\left\lfloor \frac{n}{p^t} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{p^t} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m}{p^t} \right\rfloor + 1$$

για κάθε  $t \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Αν λοιπόν γράψουμε  $r_1(t)$  και  $r_2(t)$  για τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των  $m$  και  $n - m$  αντίστοιχα με το  $p^t$ , τότε θέλουμε  $r_1(t) + r_2(t) \geq p^t$  για κάθε  $t \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

Έχουμε  $p \leq n$ . Επίσης ο  $n + 1$  είναι πρώτος, άρα  $p \nmid (n + 1)$ . Δηλαδή  $n \not\equiv -1 \pmod{p}$ . Θέτουμε  $m = p^k - 1$ . Σίγουρα είναι  $r_1(t) = p^t - 1$ . Επίσης  $r_2(t) \geq 1$  αφού σε διαφορετική περίπτωση θα είχαμε  $p^t | (n - m)$  το οποίο μαζί με το  $m = p^k - 1$  δίνει  $p | (n + 1)$ , άτοπο.

### Σχόλια

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Legendre μπορεί ναδειχθεί το εξής ισοδύναμο αποτέλεσμα:

#### Τύπος Legendre (Εναλλακτική μορφή)

Έστω  $n$  θετικός ακέραιος,  $p$  πρώτος αριθμός, και έστω  $S_p(n)$  το άθροισμα των ψηφίων του  $n$  όταν αυτός γραφτεί με βάση το  $p$ . Τότε

$$\nu_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p - 1}$$

Π.χ. στην βάση 7 το 1000 γράφεται ως  $(2626)_7$  αφού  $1000 = 2 \cdot 7^3 + 6 \cdot 49 + 2 \cdot 7 + 6$ . Άρα  $S_7(1000) = 16$  και  $\nu_7(1000!) = \frac{1000-16}{7-1} = 164$ . Ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα παίρνουμε ασφαλώς και με τον τύπο του Legendre όπως τον είδαμε στην λύση του [OLY2018-A07](#):

$$\nu_7(1000!) = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{7^3} \right\rfloor = 142 + 20 + 2 = 164$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Legendre στην πιο πάνω μορφή καθώς και την μέθοδο της λύσης του προβλήματος μπορεί ναδειχθεί το πιο κάτω:

#### Θεώρημα Kummer

Έστω θετικοί ακέραιοι  $m, n$  με  $m \leq n$ , και έστω πρώτος  $p$ . Τότε η μεγαλύτερη δύναμη του  $p$  η οποία διαιρεί το  $\binom{n}{m}$  ισούται με το πλήθος των φορών που έχουμε κρατούμενο ψηφίο όταν προσθέσουμε τους  $m$  και  $n - m$  στην βάση  $p$ .