



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-B15

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Στην αριστερή όχθη ενός ποταμού βρίσκονται 100 νάνοι οι οποίοι ζυγίζουν $1, 2, \dots, 100$ κιλά αντίστοιχα. Θέλουν να περάσουν στην δεξιά όχθη η οποία μπορεί να μετακινήσει νάνους με συνολικό βάρος μέχρι 100 κιλά. Σε κάθε μετακίνηση από την μία όχθη στην άλλη κωπηλατεί πάντα ένας από τους νάνους. Κάθε νάνος όμως μπορεί να κωπηλατήσει μόνο μία φορά από την αριστερή όχθη στην δεξιά λόγω ισχυρού ρεύματος.

Μπορούν να περάσουν όλοι οι νάνοι στην δεξιά όχθη;

Πηγή: Ρωσία 2017

Προτεινόμενη Λύση

Θα δείξουμε πιο γενικά ότι αν έχουμε $2n$ νάνους, αυτοί δεν μπορούν να περάσουν στην αντίπερα όχθη. Έστω ότι έγιναν k μετακινήσεις από δεξιά προς τα αριστερά, και άρα $k + 1$ μετακινήσεις από αριστερά προς δεξιά.

Από τα δεξιά στα αριστερά, επειδή κάθε φορά κωπηλατεί διαφορετικός νάνος, μεταφέρθηκαν νάνοι συνολικού βάρους τουλάχιστον:

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Άρα από αριστερά προς δεξιά μεταφέρθηκαν νάνοι συνολικού βάρους:

$$\frac{k(k+1)}{2} + 1 + 2 + \dots + 2n = \frac{k(k+1)}{2} + n(2n+1)$$

Όμως έγιναν $k+1$ μετακινήσεις από αριστερά προς δεξιά και σε κάθε μία μεταφέρονταν νάνοι συνολικού βάρους το πολύ $2n$. Οπότε:

$$\frac{k(k+1)}{2} + n(2n+1) \leq 2n(k+1)$$

Ισοδύναμα έχουμε $k^2 + (1 - 4n)k + 4n^2 - 2n \leq 0$ και λύνοντας την δευτεροβάθμια παίρνουμε $2n - 1 \leq k \leq 2n$. Εφόσον ο k είναι ακέραιος, πρέπει $k = 2n - 1$ ή $k = 2n$.

Στην περίπτωση όπου $k = 2n - 1$, πρέπει να έχουμε παντού ισότητες. Άρα κάθε φορά

μετακινούνται από αριστερά προς τα δεξιά νάνοι συνολικού βάρους $2n$ κιλών. Επίσης οι νάνοι που επιστρέφουν από δεξιά προς τα αριστερά είναι οι νάνοι με βάρος $1, 2, \dots, 2n-1$ κιλά από μία φορά ο κάθε ένας.

Συνολικά λοιπόν, κάθε νάνος βάρους $1, 2, \dots, 2n-1$ κιλών μετακινείται δύο φορές από αριστερά προς τα δεξιά. Αυτό γίνεται σε $(k+1)-1 = 2n-1$ μετακινήσεις, αφού η μία μετακίνηση θα είναι για τον νάνο βάρους n κιλών. Σε κάθε τέτοια μετακίνηση πρέπει να βρίσκονται τουλάχιστον δύο νάνοι στην βάρκα. Επειδή όμως έχουμε $2n-1$ νάνους που μετακινούνται από δύο φορές, σε κάθε τέτοια μετακίνηση πρέπει να βρίσκονται ακριβώς δύο νάνοι μέσα στην βάρκα. Όμως ο νάνος με βάρος n κιλά δεν μπορεί να βρίσκεται με μόνο έναν άλλο νάνο στην βάρκα και να έχουν συνολικό βάρος $2n$ κιλά.

Η περίπτωση $k = 2n$ είναι παρόμοια επειδή σε αυτήν την περίπτωση ο νάνος βάρους $2n$ πάει δύο φορές από αριστερά στα δεξιά και άρα πάλι θα μείνουν μόνο $2n-1$ μετακινήσεις για τους νάνους βάρους $1, 2, \dots, 2n-1$ κιλών.