



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-B16

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Έστω $a, b, c \geq 0$ ώστε $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Ναδειχθεί ότι:

$$0 \leq ab + bc + ca - abc \leq 2$$

Πηγή: ΗΠΑ 2001

Προτεινόμενη Λύση

Από AM-ΓΜ έχουμε:

$$ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$$

Θέτοντας λοιπόν $t = \sqrt[3]{abc}$, για την αριστερή ανισότητα αρκεί να δείξουμε ότι $3t^2 - t^3 \geq 0$. Ισοδύναμα θέλουμε $t \leq 3$, δηλαδή $abc \leq 27$, το οποίο είναι προφανές από την δοσμένη συνθήκη.

Για την δεξιά ανισότητα, παρατηρούμε αρχικά ότι $a, b, c \leq 2$. Μπορούμε μάλιστα να υποθέσουμε ότι $a, b, c < 2$ αφού αν χωρίς βλάβη της γενικότητας $a = 2$, τότε $b = c = 0$ και το ζητούμενο είναι προφανές. Άρα υπάρχουν $A, B, C \in (0, \pi/2]$ ώστε $a = 2 \cos A$, $b = 2 \cos B$ και $c = 2 \cos C$. Τότε έχουμε:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1$$

Έχουμε λοιπόν μια δευτεροβάθμια εξίσωση στο $\cos C$ και λύνοντάς την παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{-2 \cos A \cos B \pm \sqrt{4 \cos^2 A \cos^2 B - 4 \cos^2 A - 4 \cos^2 B + 4}}{2} \\ &= -\cos A \cos B \pm \sqrt{(1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 B)} \\ &= -\cos A \cos B \pm \sin A \sin B \\ &= -\cos(A \pm B) \end{aligned}$$

Επειδή $A, B, C \in (0, \pi/2]$, πρέπει $\cos C = -\cos(A + B) = \cos(\pi - (A + B))$. Δηλαδή, οι A, B, C είναι γωνίες μη αμβλυγώνιου τριγώνου.

Έχουμε:

$$ab + bc + ca - abc = ab + bc + ca + a^2 + b^2 + c^2 - 4 = \frac{(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2}{2} - 4$$

Οπότε θέλουμε να δείξουμε ότι:

$$(\cos A + \cos B)^2 + (\cos B + \cos C)^2 + (\cos C + \cos A)^2 \leq 3$$

Όμως:

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) \leq 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) = 2 \sin \frac{C}{2}$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι:

$$\sin^2 \left(\frac{A}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{B}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{C}{2} \right) \leq \frac{3}{4}$$

Όμως η συνάρτηση $f(x) = \sin^2(x/2)$ είναι κυρτή στο $[0, \pi/2]$ αφού $f'(x) = 2 \sin(x/2) \cos(x/2) = 2 \sin(x)$ και άρα $f''(x) = 2 \cos(x) \geq 0$. Άρα από την ανισότητα Jensen έχουμε:

$$\sin^2 \left(\frac{A}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{B}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{C}{2} \right) \leq 3 \sin^2 \left(\frac{A+B+C}{6} \right) = \frac{3}{4}$$

Το ζητούμενο λοιπόν αποδείχθηκε.

Σχόλιο

Κάποιες ανισότητες μπορούν να αποδειχθούν ευκολότερα με την χρήση μετασχηματισμών. Σε αυτήν την άσκηση είδαμε ότι όταν έχουμε την συνθήκη $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ με $a, b, c \geq 0$, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό:

$$a = 2 \cos A, \quad b = 2 \cos B, \quad c = 2 \cos C$$

όπου είτε οι A, B, C είναι γωνίες μη αμβλυγώνιου τριγώνου είτε η μία από τις γωνίες ισούται με 0 και οι άλλες δύο με $\pi/2$.