



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-B20

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνονται θετικοί πραγματικοί αριθμοί $a_{0,1}, a_{0,2}, \dots, a_{0,2016}$. For $n \geq 0$ και $1 \leq k < 2016$ ορίζουμε

$$a_{n+1,k} = a_{n,k} + \frac{1}{2a_{n,k+1}} \quad \text{και} \quad a_{n+1,2016} = a_{n,2016} + \frac{1}{2a_{n,1}}.$$

Ναδειχθεί ότι $\max_{1 \leq k \leq 2016} a_{2016,k} > 44$.

Πηγή: Διαγωνισμός Βαλτικών Χωρών 2016

Προτεινόμενη Λύση

Θα δείξουμε με επαγωγή στο n ότι:

$$\sum_{k=1}^{2016} a_{n,k} \geq 2016\sqrt{n}$$

Αυτό είναι αρκετό αφού τότε θα έχουμε:

$$\max_{1 \leq k \leq 2016} a_{2016,k} \geq \frac{1}{2016} \sum_{k=1}^{2016} a_{2016,k} \geq \sqrt{2016} > 44$$

Η περίπτωση $n = 0$ είναι προφανής. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για $n = r$, δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{2016} a_{r,k} \geq 2016\sqrt{r}$$

Για $n = r + 1$ θα έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{2016} a_{r+1,k} = \sum_{k=1}^{2016} \left(a_{r,k} + \frac{1}{2a_{r,k+1}} \right) = \sum_{k=1}^{2016} \left(a_{r,k} + \frac{1}{2a_{r,k}} \right)$$

όπου με $a_{r,2017}$ δηλώνουμε το $a_{r,1}$.

Η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{2x}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}^+$ αφού $f''(x) = \frac{1}{x^3}$. Άρα από την ανισότητα Jensen έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{2016} \left(a_{r,k} + \frac{1}{2a_{r,k}} \right) \geq 2016 f \left(\frac{S}{2016} \right)$$

όπου $S = \sum_{k=1}^{2016} a_{n,k}$. Η συνάρτηση f είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}^+$ αφού για $x < y$ έχουμε:

$$f(y) - f(x) = y + \frac{1}{2y} - x - \frac{1}{2x} = (y - x) - \frac{x - y}{2xy} = \frac{(y - x)(2xy + 1)}{2xy} > 0$$

Άρα εν τέλει έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{2016} a_{r+1,k} \geq 2016 f(\sqrt{r}) = 2016 \left(\sqrt{r} + \frac{1}{2\sqrt{r}} \right) \geq 2016\sqrt{r+1}$$

αφού:

$$\left(\sqrt{r} + \frac{1}{2\sqrt{r}} \right)^2 = r + 1 + \frac{1}{4r} > r + 1$$

Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα και άρα ισχύει το ζητούμενο.