



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-B22

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Ονομάζουμε ένα θετικό ακέραιο N ισορροπημένο αν $N = 1$ ή αν είναι γινόμενο περιττού πλήθους πρώτων αριθμών (όχι απαραίτητα διαφορετικών). Δοθέντων θετικών ακεραίων a, b θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = (x + a)(x + b)$.

(α) Ναδειχθεί ότι υπάρχουν διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι a, b ώστε οι αριθμοί $P(1), P(2), \dots, P(50)$ να είναι όλοι ισορροπημένοι.

(β) Αν ο $P(n)$ είναι ισορροπημένος για κάθε θετικό ακέραιο n , ναδειχθεί ότι $a = b$.

Πηγή: IMO Shortlist 1999

Προτεινόμενη Λύση

Παρατηρούμε ότι ο $P(k)$ είναι ισορροπημένος αν και μόνο αν από τους $k + a, k + b$ είτε και οι δύο είναι ισορροπημένοι είτε και οι δύο είναι μη ισορροπημένοι. Για κάθε θετικό ακέραιο m ορίζουμε $x_m = 1$ αν ο m είναι ισορροπημένος και $x_m = 0$ διαφορετικά.

Για το (α) λοιπόν αρκεί να δείξουμε ότι μπορούμε να βρούμε θετικούς ακεραίους a, b ώστε $x_{a+i} = x_{b+i}$ για κάθε $1 \leq i \leq 50$. Κοιτάζουμε όλα τα διανύσματα της μορφής $v_m = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+50})$. Υπάρχουν το πολύ 2^{50} διαφορετικά διανύσματα που μπορούμε να πάρουμε άρα αναγκαστικά δύο τουλάχιστον (στην πραγματικότητα άπειρα) από τα $v_1, v_2, \dots$ είναι ίδια. Έστω τα v_a και v_b . Τότε όμως αυτά τα a και b ικανοποιούν το ζητούμενο.

Η συνθήκη στο (β) μας λέει ότι $x_{a+k} = x_{b+k}$ για κάθε θετικό ακέραιο k . Τότε όμως είναι:

$$x_{(a+1)(b-a)} = x_{(a+2)(b-a)} = x_{(a+3)(b-a)} = \dots$$

με τις ισότητες να λαμβάνονται επιλέγοντας διαδοχικά $k = (a + 1)(b - a) - a, k = (a + 2)(b - a) - a, \dots$

Αλλά τότε έχουμε $x_{(a+1)(b-a)} = x_{2(a+1)(b-a)}$ που είναι άτοπο επειδή ο $2(a + 1)(b - a)$ έχει στο γινόμενό του ακριβώς έναν πρώτο περισσότερο από τον $(a + 1)(b - a)$.