



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-B24

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνεται αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ η οποία ικανοποιεί $f(f(n)) = 3n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Να υπολογιστεί το $f(2018)$.

Προτεινόμενη Λύση

Θα δείξουμε με επαγωγή ότι $f(3^{n-1}) = 2 \cdot 3^{n-1}$ και $f(2 \cdot 3^{n-1}) = 3^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να έχουμε $f(1) = 1$ αφού τότε θα ίσχυε ότι $f(f(1)) = f(1) = 1$. Πρέπει λοιπόν $f(1) > 1$ και άρα $3 = f(f(1)) > f(1)$. Αναγκαστικά θα είναι $f(1) = 2$. Τότε θα έχουμε και $f(2) = f(f(1)) = 3$. Άρα ο ισχυρισμός μας είναι αληθής για $n = 1$.

Έστω ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για $n = k$. Δηλαδή $f(3^{k-1}) = 2 \cdot 3^{k-1}$ και $f(2 \cdot 3^{k-1}) = 3^k$. Τότε θα έχουμε:

$$f(3^k) = f(f(2 \cdot 3^{k-1})) = 3 \cdot 2 \cdot 3^{k-1} = 2 \cdot 3^k$$

και:

$$f(2 \cdot 3^k) = f(f(3^{k+1})) = 3 \cdot 3^k = 3^{k+1}$$

Άρα ο ισχυρισμός είναι αληθής και για $n = k + 1$. Οπότε είναι αληθής και για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έχουμε $f(729) = f(3^6) = 2 \cdot 3^6 = 1458$ και $f(1458) = 3 \cdot 729 = 2187$. Υπάρχουν ακριβώς 728 αριθμοί ενδιάμεσα των 729 και 1458. Υπάρχουν επίσης ακριβώς 728 αριθμοί ενδιάμεσα των $f(729) = 1458$ και $f(1458) = 2187$. Επειδή η f είναι αύξουσα, πρέπει να έχουμε $f(729 + n) = 1458 + n$ για κάθε $n \in \{1, 2, \dots, 728\}$.

Άρα έχουμε $f(1289) = f(729 + 560) = 1458 + 560 = 2018$, από το οποίο παίρνουμε $f(2018) = 3 \cdot 1289 = 3867$.

Σχόλια

Αν και δεν το έχουμε γράψει στην λύση διότι δεν ήταν απαραίτητο, αρχικά υπολογίσαμε τα $f(n)$ για μικρά n από όπου και μαντέψαμε τον αρχικό ισχυρισμό.

Προσοχή επίσης ότι στην επαγωγική απόδειξη, αποδεικνύουμε τα $f(3^{n-1}) = 2 \cdot 3^{n-1}$ και $f(2 \cdot 3^{n-1}) = 3^n$ ταυτόχρονα. Μάλιστα η επαγωγική υπόθεση του ενός χρησιμοποιείται στο επαγωγικό βήμα του άλλου και αντίστροφα. Αν προσπαθούσαμε να αποδείξουμε το κάθε ένα επαγωγικά από μόνο του, θα αποτυγχάναμε.

