



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-B28

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $r_1, \dots, r_n$ μεγαλύτεροι ή ίσοι του 1. Ναδειχθεί ότι:

$$\frac{1}{r_1 + 1} + \dots + \frac{1}{r_n + 1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{r_1 \cdots r_n} + 1}$$

Πηγή: IMO Shortlist 1998

Προτεινόμενη Λύση 1

Θα το δείξουμε πρώτα όταν ο n είναι της μορφής 2^m . Για $m = 0$ είναι προφανές ενώ για $m = 1$ θέλουμε:

$$\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} \geq \frac{2}{xy + 1}$$

για $x, y \geq 1$. Όμως

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} \geq \frac{2}{xy + 1} &\Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{xy + 1} \geq \frac{1}{xy + 1} - \frac{1}{y^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow \frac{x(y - x)}{(x^2 + 1)(xy + 1)} \geq \frac{y(y - x)}{(y^2 + 1)(xy + 1)} \\ &\Leftrightarrow \frac{(y - x)}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)(xy + 1)} [x(y^2 + 1) - y(x^2 + 1)] \\ &\Leftrightarrow \frac{(y - x)^2(xy - 1)}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)(xy + 1)} \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει.

Έστω τώρα ότι ισχύει για $m = k$. Τότε για $m = k + 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{r_i + 1} &= \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{r_i + 1} + \sum_{i=2^{k+1}}^{2^{k+1}} \frac{1}{r_i + 1} \\ &\geq \frac{2^k}{\sqrt[2^k]{r_1 r_2 \cdots r_{2^k}} + 1} + \frac{2^k}{\sqrt[2^k]{r_{2^k+1} r_{2^k+2} \cdots r_{2^{k+1}}} + 1} \\ &\geq \frac{2^{k+1}}{\sqrt[2^{k+1}]{r_1 r_2 \cdots r_{2^{k+1}}} + 1} \end{aligned}$$

Στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την επαγωγική υπόθεση και στην δεύτερη την περίπτωση $m = 1$.

Άρα η ανισότητα ισχύει όταν ο n είναι της μορφής 2^m . Για γενικό n παίρνουμε m ώστε $n < 2^m$ και θέτουμε: $r_{n+1} = \dots = r_{2^m} = \sqrt[n]{r_1 \dots r_n}$. Γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{1}{r_1 + 1} + \dots + \frac{1}{r_{2^m} + 1} \geq \frac{2^m}{\sqrt[n]{r_1 \dots r_{2^m}} + 1}$$

Όμως:

$$\sqrt[n]{r_1 \dots r_{2^m}} = (r_1 \dots r_n)^{\frac{1}{2^m}} (r_{n+1} \dots r_{2^m})^{\frac{1}{2^m}} = (r_1 \dots r_n)^{\frac{1}{2^m} + \frac{2^m - n}{n \cdot 2^m}} = \sqrt[n]{r_1 \dots r_n}$$

Άρα:

$$\frac{1}{r_1 + 1} + \dots + \frac{1}{r_n + 1} + \frac{2^m - n}{\sqrt[n]{r_1 \dots r_n} + 1} \geq \frac{2^m}{\sqrt[n]{r_1 \dots r_n} + 1}$$

από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

Προτεινόμενη Λύση 2

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ ικανοποιεί

$$f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \quad \text{και} \quad f''(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} + \frac{2e^{2x}}{(e^x + 1)^3} = \frac{e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^3} \geq 0$$

για $x \geq 0$. Οπότε η συνάρτηση είναι κυρτή στο $[0, \infty)$.

Άρα:

$$\frac{1}{e^{x_1} + 1} + \dots + \frac{1}{e^{x_n} + 1} \geq \frac{n}{e^{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}} + 1}$$

για κάθε $x_1, \dots, x_n \geq 0$.

Θέτοντας $x_i = \log r_i$ για $1 \leq i \leq n$ παίρνουμε την ζητούμενη ανισότητα.

Σχόλιο

Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε στην Προτεινόμενη Λύση 1, δηλαδή πρώτα να αποδείξουμε των ισχυρισμό επαγωγικά για όλα τα n της μορφής 2^m και μετά για τα υπόλοιπα n ονομάζεται επαγωγή Cauchy. Με παρόμοιο τρόπο (δοκιμάστε το) μπορεί να αποδειχθεί και η ανισότητα AM-ΓΜ.