



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2018-B30

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Ναδειχθεί ότι υπάρχουν άπειρα ζεύγη θετικών ακεραίων (m, n) ώστε ο $m+n$ να διαιρεί τον $(m!)^n + (n!)^m + 1$.

Πηγή: Διαγωνισμός Zhautykov 2018

Προτεινόμενη Λύση

Θα προσπαθήσουμε να επιλέξουμε τους m, n με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουμε:

$$(n+m)|(m!)^n \quad \text{και} \quad (n+m)|[(n!)^m + 1]$$

Για να επιτύχουμε τα πιο πάνω, αρκεί να τους επιλέξουμε με τέτοιο τρόπο ώστε:

$$(n+m)|m! \quad \text{και} \quad n! \equiv (-1) \pmod{n+m} \quad \text{και} \quad m \text{ περιττός}$$

Δηλαδή:

$$(n+m)|m! \quad \text{και} \quad (n+m)|(n!+1) \quad \text{και} \quad m \text{ περιττός}$$

Η δύσκολη συνθήκη να επιτευχθεί είναι η $(n+m)|(n!+1)$ επειδή δεν γνωρίζουμε τους διαιρέτες του $n!+1$. Γι' αυτό, επιλέγουμε $m = n! - n + 1$ ώστε να έχουμε αυτή την συνθήκη αυτόματα. Αυτό μας εγγυάται και την συνθήκη ο m να είναι περιττός.

Μένει λοιπόν να κάνουμε κατάλληλη επιλογή ώστε $(n+m)|m!$. Παρατηρούμε (για $n \geq 4$) ότι $m > n$. Αν λοιπόν ο $m+n$ είναι σύνθετος, έστω $m+n = ab$ όπου $a, b > 1$ τότε έχουμε και $a, b \leq (m+n)/2 < m$. Τότε όμως ο $m+n = ab$ θα διαιρεί σίγουρα τον $m!$ εκτός πιθανώς από την περίπτωση όπου $a = b$.

Επειδή $m+n = n!+1$, μια επιλογή η οποία μας εγγυάται ότι ο $m+n$ είναι σύνθετος, είναι να πάρουμε $n = p-1$ για κάποιον πρώτο p . Διότι τότε από το Θεώρημα Wilson θα γνωρίζουμε ότι $n!+1$ είναι πολλαπλάσιο του p .

Μένει μόνο να κάνουμε την επιλογή με τέτοιο τρόπο ώστε $n!+1 \neq p^2$. Όμως για $p \geq 7$

έχουμε:

$$n! + 1 > 2 \cdot 3 \cdot (p-2) \cdot (p-1) > 6 \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} > p^2$$

Άρα για κάθε πρώτο $p \geq 7$ το ζεύγος (m, n) όπου $n = p-1$ και $m = (p-1)! - p + 1$ ικανοποιεί την συνθήκη.

