



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2019-A01

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Ο αριθμός 3 είναι γραμμένος στον πίνακα. Η Άννα και ο Βασίλης, με την Άννα να παίζει πρώτη, κάνουν κινήσεις εναλλάξ παίζοντας το ακόλουθο παιχνίδι. Αν όταν έρθει η σειρά ενός παίκτη είναι στον πίνακα γραμμένος ο αριθμός n , τότε ο παίκτης τον αντικαθιστά με κάποιο θετικό ακέραιο m ο οποίος είναι σχετικά πρώτος ως προς τον n και ικανοποιεί την συνθήκη $n < m < n^2$. Ο παίκτης που θα γράψει πρώτος στον πίνακα κάποιον αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2016 χάνει. Να βρεθεί ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης και να περιγράψετε την στρατηγική αυτού του παίκτη.

Πηγή: Κεντροαμερικανική Ολυμπιάδα 2016

Προτεινόμενη Λύση

Κερδίζει η Άννα με την εξής στρατηγική. Αρχικά γράφει στον πίνακα τον αριθμό 5. Ο Βασίλης θα γράφει έναν αριθμό από το 6 μέχρι το 24 ο οποίος δεν είναι πολλαπλάσιος του 5. Οπότε η Άννα μπορεί μετά να γράφει το 25. Με παρόμοια λογική στην επόμενη κίνησή της θα γράφει το 625. Ακολούθως ο Βασίλης θα γράφει έναν αριθμό από το 626 μέχρι το $625^2 - 1$ ο οποίος δεν είναι πολλαπλάσιος του 5. Αν η Άννα δεν έχει ακόμη κερδίσει τότε γράφει είτε το 2005 είτε το 2015. Σίγουρα μπορεί να το κάνει αυτό για τον εξής λόγο:

Ως γινόμενο πρώτων παραγόντων έχουμε $2005 = 5 \cdot 401$ και $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Αν η Άννα δεν μπορεί να γράφει το 2005 αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός k που έγραψε ο Βασίλης είναι πολλαπλάσιο του 401. Για παρόμοιο λόγο έχουμε και ότι το k είναι πολλαπλάσιο του 13 ή του 31. Άρα $k \geq 13 \cdot 401 > 2016$, άτοπο.

Αν η Άννα γράφει το 2015 τότε στην επόμενη κίνηση ο Βασίλης χάνει. Αν η Άννα γράφει το 2005 και ο Βασίλης δεν χάσει στην αμέσως επόμενη κίνησή του, τότε η Άννα μπορεί μετά να γράφει το 2015. Τότε ο Βασίλης θα χάσει στην επόμενη κίνησή του.