



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2019-A02

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Ας ονομάσουμε έναν θετικό ακέραιο $n \geq 3$ κυκλικό αν υπάρχει μια κυκλική διάταξη n (όχι απαραίτητα διαφορετικών) θετικών ακεραίων ώστε το γινόμενο κάθε τριών συνεχόμενων στη διάταξη να είναι ίσο με n .

Να βρεθεί το πλήθος των κυκλικών θετικών ακεραίων n στο διάστημα $3 \leq n \leq 2018$.

Πηγή: Βρετανία 2018

Προτεινόμενη Λύση

Ισοδύναμα ψάχνουμε για ποιους θετικούς ακεραίους n το πιο κάτω σύστημα έχει λύση στους θετικούς ακεραίους:

$$\begin{aligned}x_1 x_2 x_3 &= n \\x_2 x_3 x_4 &= n \\&\vdots \\x_{n-2} x_{n-1} x_n &= n \\x_{n-1} x_n x_1 &= n \\x_n x_1 x_2 &= n\end{aligned}$$

Από τις πρώτες δύο γραμμές παίρνουμε $x_1 x_2 x_3 = x_2 x_3 x_4$ και αφού $x_2, x_3 \neq 0$, τότε $x_1 = x_4$. Ομοίως $x_2 = x_5, x_3 = x_6$ και γενικά $x_i = x_{i+3}$ για κάθε $1 \leq i \leq n$ όπου οι δείκτες είναι modulo n . (Π.χ. με x_{n+1} εννοούμε το x_1 κ.τ.λ.)

Αν το n είναι πολλαπλάσιο του 3, έστω $n = 3k$, μπορούμε να πάρουμε την λύση

$$k, 3, 1, k, 3, 1, \dots, k, 3, 1$$

όπου το $k, 3, 1$ επαναλαμβάνεται k φορές.

Αν $n = 3k + 1$ τότε έχουμε:

$$x_1 = x_4 = \dots = x_{3k+1} = x_3 = \dots = x_{3k} = x_2 = \dots = x_{3k-1}$$

Δηλαδή όλα τα x_i είναι ίσα. Τότε πρέπει και αρκεί ο n να είναι τέλειος κύβος. Ακριβώς το ίδιο συμπέρασμα παίρνουμε αν $n = 3k + 2$.

Άρα ο n είναι κυκλικός αν και μόνο αν είναι πολλαπλάσιο του 3 ή είναι τέλεια τρίτη δύναμη. Στο διάστημα $3 \leq n \leq 2018$ έχουμε $\frac{2016}{3} = 672$ πολλαπλάσια του 3. Έχουμε επίσης 11 τέλειους κύβους αφού $12^3 < 2018 < 13^3$. (Αγνοούμε ασφαλώς το 1^3 .) Όμως 4 από αυτούς τους τέλειους κύβους είναι και πολλαπλάσια του 3 τα οποία έχουμε ήδη μετρήσει.

Τελικά έχουμε $672 + 11 - 4 = 679$ κυκλικούς αριθμούς.

