



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2019-A03

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Ναδειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο n , η παράσταση

$$A = 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$$

είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 1897.

Πηγή: Ουγγαρία 1899

Προτεινόμενη Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Από αυτήν την ταυτότητα βλέπουμε ότι αν οι x, y είναι ακέραιοι, τότε το $x^n - y^n$ είναι πολλαπλάσιο του $x - y$.

Έχουμε λοιπόν:

$$2100 | 2903^n - 803^n \quad \text{και} \quad 203 | 464^n - 261^n$$

Επειδή $(2100, 203) = 7$, παίρνουμε ότι $7 | A$.

Έχουμε επίσης:

$$2439 | 2903^n - 464^n \quad \text{και} \quad 542 | 803^n - 261^n$$

Επειδή $(2439, 542) = 271$, παίρνουμε ότι $271 | A$.

Τέλος, επειδή $(7, 271) = 1$ πρέπει και $7 \cdot 271 | A$, δηλαδή $1897 | A$ όπως θέλαμε να δείξουμε.