



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2019-A06

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρεθούν όλες οι τριάδες θετικών ακεραίων (a, b, c) με $a \geq b \geq c$ ώστε:

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) = 2$$

Πηγή: Βοσνία 2015

Προτεινόμενη Λύση

Δεν μπορούμε να έχουμε $c = 1$ αφού τότε:

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) = 2 \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) > 2$$

Επίσης, αν $c \geq 4$ τότε $a, b \geq 4$ άρα:

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{4}\right)^3 = \frac{125}{64} < 2$$

Πρέπει λοιπόν $c = 2$ ή $c = 3$.

Αν $c = 2$ τότε:

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) = \frac{4}{3}$$

Δοκιμάζοντας διαδοχικά τις τιμές $b = 2, 3, \dots, 6$ βρίσκουμε ως δεκτές τις τριάδες $(15, 4, 2), (9, 5, 2), (7, 6, 2)$. Εδώ σταματάμε αφού αν $b = 7$ τότε $a = 6 < 7$ και αν $b \geq 7$ τότε $a \leq 6 < b$.

Με παρόμοιο τρόπο για $c = 3$ αρκεί να ελέγξουμε τις τιμές $b = 3, 4$ και παίρνουμε τις τριάδες $(8, 3, 3)$ και $(5, 4, 3)$.