



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2019-A07

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) όπου $a_1 = 0, a_2 = 1$ και για $n > 2$ ο a_n λαμβάνεται τοποθετώντας τον a_{n-1} μπροστά από τον a_{n-2} . Π.χ. $a_3 = 10, a_4 = 101, a_5 = 10110, \dots$

Να βρεθεί για ποιες τιμές του n ο a_n είναι πολλαπλάσιο του 11.

Πηγή: Putnam 1998

Προτεινόμενη Λύση

Για $n > 2$, έχουμε ότι $a_n = 10^{d_{n-2}} a_{n-1} + a_{n-2}$, όπου d_{n-2} είναι το πλήθος των ψηφίων του a_{n-2} . Η ακολουθία d_n ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $d_1 = d_2 = 1$ και $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$ για $n > 2$. (Δηλαδή $d_n = F_{n-1}$ όπου (F_n) η ακολουθία Fibonacci.)

Modulo 2 η ακολουθία d_n είναι η $1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots$ οπότε είναι περιοδική με περίοδο 3. Άρα ο d_n είναι άρτιος αν και μόνο αν το n είναι πολλαπλάσιο του 3.

Έχουμε $a_n = 10^{d_{n-2}} a_{n-1} + a_{n-2} \equiv (-1)^{d_{n-2}} a_{n-1} + a_{n-2} \pmod{11}$. Άρα modulo 11 η ακολουθία a_n είναι η:

$$0, 1, -1, 2, 1, 1, 0, 1, \dots$$

Από την στιγμή που εμφανίστηκαν ξανά τα $0, 1$ με περίοδο 6 το οποίο είναι πολλαπλάσιο της περιόδου της (d_n) modulo 2, η (a_n) θα είναι περιοδική modulo 11 με περίοδο 6. Επίσης βλέπουμε ότι το a_n θα είναι πολλαπλάσιο του 11 αν και μόνο αν $n \equiv 1 \pmod{6}$.