



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2019-A08
Επιμέλεια: Σωτήρης Λοϊζιάς

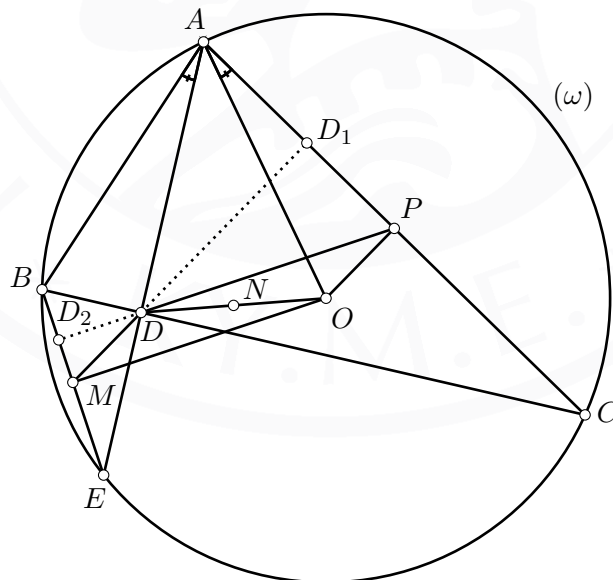
Πρόβλημα

Έστω D σημείο πάνω στην πλευρά BC ενός οξυγώνιου τριγώνου $\triangle ABC$ τέτοιο, ώστε $\angle BAD = \angle CAO$, όπου O το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου (ω) του τριγώνου $\triangle ABC$. Έστω, επίσης, E το δεύτερο σημείο τομής του κύκλου (ω) και της ευθείας AD . Ονομάζουμε M, N και P τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων BE, OD και AC , αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα σημεία M, N και P είναι συνευθειακά.

Πηγή: JBMO Shortlist, 2013

Προτεινόμενη Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι το τετράπλευρο $MOPD$ είναι παραλληλόγραμμο.



Αφού $\angle BAD = \angle CAO = 90^\circ - \angle ABC$, τότε το σημείο D είναι το ίχνος του κάθετου ευθύγραμμου τμήματος από την κορυφή A στην πλευρά BC . Επειδή το σημείο M είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος BE , τότε έχουμε ότι $BM = ME = MD$ και $\angle MDE = \angle MED = \angle ACB$.

Έστω D_1 το σημείο τομής της MD με την AC . Αφού $\angle ADD_1 = \angle MDE = \angle ACD$, τότε η MD είναι κάθετη στην AC . Από την άλλη, αφού το σημείο O είναι το περίκεντρο του τριγώνου $\triangle ABC$ και το σημείο P είναι το μέσο της πλευράς AC , τότε η OP είναι κάθετη στην AC . Επομένως, έχουμε ότι $MD \parallel OP$.

Ομοίως, αφού το σημείο P είναι το μέσο της πλευράς AC , τότε $AP = PC = DP$ και $\angle PDC = \angle ACB$. Έστω D_2 το σημείο τομής της PD με την BE . Αφού έχουμε ότι $\angle BDD_2 = \angle PDC = \angle ACB = \angle BED$, τότε η PD είναι κάθετη στην BE . Από την άλλη, αφού το σημείο M είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος BE , τότε η OM είναι κάθετη στην BE . Επομένως, έχουμε ότι $OM \parallel PD$ και τελειώσαμε.

