



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2019-A09

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

101 σοφοί κάθονται γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι. Κάθε ένας από αυτούς είτε πιστεύει ότι η γη γυρίζει γύρω από τον ήλιο, είτε ότι ο ήλιος γυρίζει γύρω από την γη. Κάθε λεπτό εκφράζουν όλοι ταυτόχρονα τη γνώμη τους. Ακολουθώντας, κάθε σοφός ο οποίος διαφωνεί με τους δυο διπλανούς του αλλάζει τη γνώμη του αλλιώς εξακολουθεί να έχει την ίδια άποψη. Να δειχθεί ότι από ένα σημείο και μετά θα σταματήσουν να αλλάζουν τις γνώμες τους.

Πηγή: Ρωσία 2012

Προτεινόμενη Λύση

Έστω N το πλήθος των ζευγών (x, y) ώστε ο y κάθετα αμέσως στα δεξιά του x και έχει διαφορετική γνώμη από τον x . Θα δείξουμε ότι κάθε φορά που τουλάχιστον ένας σοφός αλλάζει γνώμη, το N μειώνεται. Επειδή δεν μπορεί να μειώνεται συνέχεια, τότε σε κάποιο σημείο κανένας σοφός δεν θα αλλάξει γνώμη και από εκείνο το σημείο και έπειτα θα σταματήσουν να αλλάζουν γνώμες.

Έστω λοιπόν ότι ο x αλλάζει γνώμη. Αν άλλαζαν όλοι γνώμη τότε εναλλάξ θα είχαν διαφορετικές γνώμες. Αυτό όμως είναι άτοπο επειδή έχουμε περιττό πλήθος σοφών. Άρα μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία σοφών $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$ ώστε ο x είναι ένας από τους $x_1, \dots, x_k$, οι $x_1, \dots, x_k$ αλλάζουν γνώμη, ενώ οι x_0, x_{k+1} όχι. Στα ζεύγη $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{k-1}, x_k)$ αλλάζουν και τα δύο μέλη γνώμη οπότε το N δεν αλλάζει. Στα ζεύγη (x_0, x_1) και (x_k, x_{k+1}) αλλάζουν γνώμη μόνο οι x_1, x_k , οι οποίοι αρχικά πρέπει να διαφωνούσαν με τους x_0, x_{k+1} . Άρα από αυτήν την αλυσίδα σοφών το N μειώνεται κατά 2. Χωρίζοντας τους σοφούς σε αλυσίδες σοφών που αλλάζουν γνώμη όπως πιο πάνω παίρνουμε ότι το N όντως μειώνεται.