



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2019-A10

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(x)f(y) = f(x-y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Πηγή: Τουρνουά Harvard-MIT 2017

Προτεινόμενη Λύση

Για $x = y = 0$ παίρνουμε $f(0)^2 = f(0)$, οπότε $f(0) = 0$ ή $f(0) = 1$.

Έστω $f(0) = 0$. Για $y = 0$ παίρνουμε $0 = f(x)f(0) = f(x)$. Άρα σε αυτήν περίπτωση έχουμε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $f(0) = 1$. Για $x = 0$ παίρνουμε $f(-y) = f(y)$ το οποίο ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Για $y = -t$ παίρνουμε:

$$f(x+t) = f(x)f(-t) = f(x)f(t) = f(x-t)$$

Θέτοντας $x = t = s/2$ στο πιο πάνω, παίρνουμε $f(s) = f(0) = 1$. Άρα σε αυτήν περίπτωση έχουμε $f(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.