



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2019-A17

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Η Αλίκη και ο Βασίλης δημιουργούν έναν δεκαδικό αριθμό 2018 ψηφίων επιλέγοντας τα ψηφία του εναλλάξ από τα αριστερά προς τα δεξιά ξεκινώντας από την Αλίκη. Η μόνη συνθήκη που πρέπει να τηρούν είναι ότι κάθε ψηφίο πρέπει να είναι διαφορετικό από το προηγούμενο modulo 3.

Ο Βασίλης θέλει ο τελικός αριθμός των 2018 ψηφίων να είναι πολλαπλάσιος του 3. Μπορεί η Αλίκη να το αποτρέψει αυτό;

Πηγή: Αυστρία 2018

Προτεινόμενη Λύση

Θα δείξουμε ότι η Αλίκη μπορεί να το αποτρέψει. Για να είναι ο αριθμός πολλαπλάσιος του 3, πρέπει και αρκεί το άθροισμα των ψηφίων του να είναι πολλαπλάσιο του 3.

Θα δηλώνουμε την κατάσταση του παιγνιδιού μετά από n επιλογές ψηφίων με το ζεύγος (a_n, b_n) όπου a_n είναι το άθροισμα των n ψηφίων modulo 3, και b_n είναι ο τελευταίος αριθμός που επιλέχθηκε modulo 3.

Έστω ότι επιλέχθηκαν τα 2014 πρώτα ψηφία. Είναι η σειρά της Αλίκης τώρα να παίξει. Έχει δύο επιλογές οπότε μπορεί να παίξει ώστε $a_{2015} \not\equiv 0 \pmod{3}$. Όπως και να παίξει ο Βασίλης, θα έχουμε $a_{2016} \equiv a_{2015} + b_{2016} \not\equiv b_{2016} \pmod{3}$. Η Αλίκη τώρα, επιλέγει το a_{2016} , κάτι που επιτρέπεται αφού $a_{2016} \not\equiv b_{2016} \pmod{3}$. Θα έχουμε $(a_{2017}, b_{2017}) = (2a_{2016}, a_{2016})$. Ο μόνος τρόπος να κάνει ο Βασίλης το άθροισμα ίσο με $0 \pmod{3}$ θα ήταν να επιλέξει το a_{2016} κάτι που όμως απαγορεύεται. Άρα όντως η Αλίκη μπορεί να το αποτρέψει.

Σχόλια

Για να βρούμε τη στρατηγική της Αλίκης ουσιαστικά δουλεύουμε από το τέλος. Για να κερδίσει ο Βασίλης στην τελευταία του κίνηση πρέπει το (a_{2017}, b_{2017}) να είναι ίσο με ένα από τα $(0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 2)$. Αλλιώς χάνει. Σκοπός λοιπόν της Αλίκης είναι να πετύχει το (a_{2017}, b_{2017}) να είναι ίσο με ένα από τα $(0, 0), (1, 2), (2, 1)$.

Ελέγχοντας όλες τις 9 πιθανές περιπτώσεις για το (a_{2016}, b_{2016}) μία προς μία βρίσκουμε ότι η Αλίκη τα καταφέρνει εκτός και αν το (a_{2016}, b_{2016}) είναι ίσο με $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$. Σκοπός λοιπόν του Βασίλη είναι να πετύχει το (a_{2016}, b_{2016}) να είναι ίσο με ένα από τα $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$. Ελέγχοντας όλες τις 9 πιθανές περιπτώσεις για το (a_{2015}, b_{2015}) μία προς μία βρίσκουμε ότι ο Βασίλης τα καταφέρνει μόνο στην περίπτωση όπου το (a_{2015}, b_{2015}) είναι ίσο με $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$. Αυτό όμως μπορεί να το αποφύγει η Αλίκη και ήταν το πρώτο βήμα της στρατηγικής που περιγράψαμε.

