



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2019-A18

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή της παράστασης:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 29} - \sqrt{x^2 - 2x + 10}$$

Προτεινόμενη Λύση

Έστω $A = (1, 3)$, $B = (2, 5)$ και $C = (x, 0)$. Παρατηρούμε ότι $BC = \sqrt{x^2 - 4x + 29}$ και $AC = \sqrt{x^2 - 2x + 10}$. Άρα η παράσταση ισούται με $BC - AC$ το οποίο από την τριγωνική ανισότητα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $AB = \sqrt{5}$.

Η ισότητα λαμβάνεται αν και μόνο αν το C βρίσκεται στην ευθεία AB από την πλευρά του A . Η εξίσωση της ευθείας AB είναι η $y - 3 = \frac{5-3}{2-1}(x - 1)$, δηλαδή η $y = 2x + 1$. Για $y = 0$ παίρνουμε $x = -\frac{1}{2}$. Το $C = (-\frac{1}{2}, 0)$ όντως βρίσκεται από την πλευρά του A . Θέτοντας $x = -\frac{1}{2}$ μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι όντως η τιμή της παράστασης γίνεται ίση με $\sqrt{\frac{125}{4}} - \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{5\sqrt{5}-3\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$.