



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ  
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2019-A20

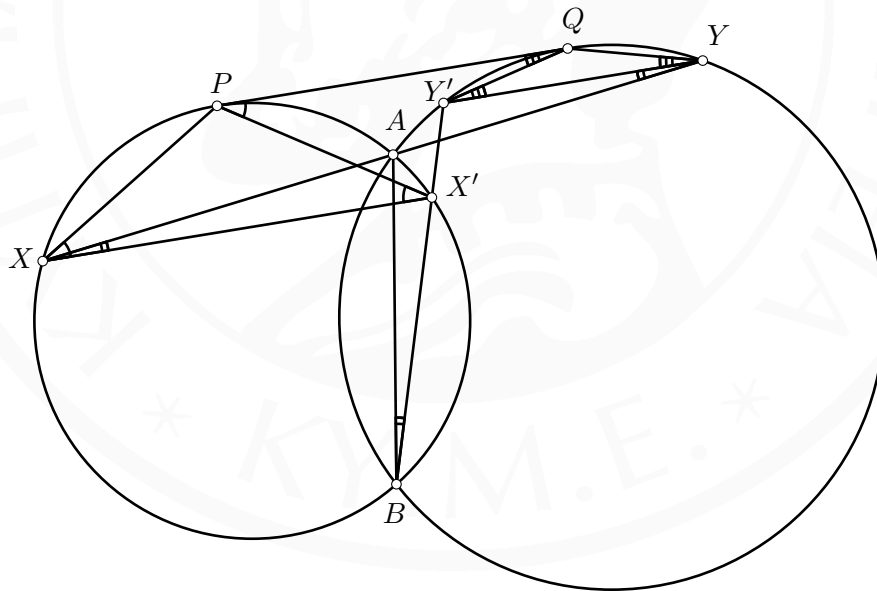
Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνονται κύκλοι  $\omega_1, \omega_2$  με σημεία τομής  $A, B$  και κοινή εφαπτομένη  $PQ$  όπου  $P \in \omega_1$  και  $Q \in \omega_2$ . Έστω σημείο  $X$  στον  $\omega_1$  και έστω ότι η  $AX$  τέμνει τον  $\omega_2$  για δεύτερη φορά στο σημείο  $Y$ . Έστω σημείο  $Y'$  στον  $\omega_2$  ώστε  $QY = QY'$ . Έστω ότι η ευθεία  $Y'B$  τέμνει τον  $\omega_1$  για δεύτερη φορά στο σημείο  $X'$ . Ναδειχθεί ότι  $PX = PX'$ .

Πηγή: Περσική Ολυμπιάδα Γεωμετρίας 2019

Προτεινόμενη Λύση



Επειδή  $QY = QY'$  τότε  $\angle QYY' = \angle QY'Y$ . Επίσης, από το θεώρημα χορδής-εφαπτομένης έχουμε  $\angle PQY' = \angle QYY'$ . Άρα  $\angle QY'Y = \angle PQY'$  οπότε οι  $PQ$  και  $YY'$  είναι παράλληλες.

Επειδή τα  $A, X', B, X$  ανήκουν στον  $\omega_1$  τότε  $\angle AX'X = \angle ABX'$ . Ομοίως  $\angle ABX' = \angle ABY' = \angle AYY'$ . Άρα και η  $XX'$  είναι παράλληλη των  $PQ$  και  $YY'$ .

Τότε όμως έχουμε  $\angle PXX' = \angle X'PQ = \angle PX'X$  οπότε  $PX = PX'$ .