



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2019-A22

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνονται θετικοί ακέραιοι a, b, c τέτοιο ώστε:

$$\frac{a^2 - a - c}{b} + \frac{b^2 - b - c}{a} = a + b + 2$$

Ναδειχθεί ότι το $a + b + c$ είναι τέλειο τετράγωνο.

Πηγή: Λευκωσία 2019

Προτεινόμενη Λύση

Κάνοντας ομώνυμα έχουμε:

$$a^3 - a^2 - ac + b^3 - b^2 - bc = a^2b + ab^2 + 2ab$$

Έχουμε ότι:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$ac + bc = (a + b)c$$

$$a^2b + ab^2 = (a + b)ab$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

Άρα

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2 - c - ab - (a + b)) = 0$$

Αφού όμως $a + b > 0$, τότε $a^2 - 2ab + b^2 - (a + b + c) = 0$ ή ισοδύναμα $a + b + c = (a - b)^2$.