



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2019-B01

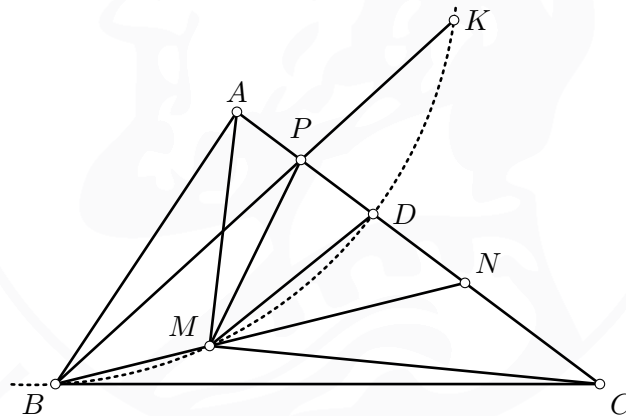
Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Δίνεται σημείο M στο εσωτερικό τριγώνου ABC . Η ευθεία BM τέμνει την AC στο N . Έστω K το συμμετρικό του M ως προς την AC . Η ευθεία BK τέμνει την AC στο P . Αν $\angle AMP = \angle CMN$, να δειχθεί ότι $\angle ABP = \angle CBN$.

Πηγή: Διαγωνισμός Zhautykov 2015

Προτεινόμενη Λύση



Οι ευθείες MP και MN είναι ισογώνιες ως προς το τρίγωνο MAC . Από βασικό λήμμα στις ισογώνιες ευθείες (δείτε την λύση του [OLY2017-B04](#)) έχουμε:

$$\left(\frac{MA}{MC}\right)^2 = \frac{AP}{CP} \cdot \frac{AN}{CN}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{BA}{BC} = \frac{MA}{MC}$ διότι τότε θα έχουμε ότι οι BP, BN είναι ισογώνιες ως προς το τρίγωνο BAC που είναι ουσιαστικά το ζητούμενο.

Έστω D το ίχνος της διχοτόμου της γωνίας $\hat{M}$ του τριγώνου AMC . Από το θεώρημα της διχοτόμου είναι $\frac{MA}{MC} = \frac{DA}{DC}$. Επειδή το K είναι το συμμετρικό του M ως προς την AC έχουμε επίσης και ότι $\frac{KA}{KC} = \frac{DA}{DC}$.

Θεωρούμε τον γεωμετρικό τόπο όλων των σημείων X του επιπέδου τα οποία ικανοποιούν $\frac{XA}{XC} = \frac{DA}{DC}$. Αυτός είναι ένας Απολλώνιος κύκλος (ω) (για την απόδειξη, δείτε τα

σχόλια στην λύση του [OLY2018-B13](#)) ο οποίος περνά από τα σημεία M, D, K . Αρκεί να δείξουμε ότι περνάει και από το B αφού τότε θα έχουμε $\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC} = \frac{MA}{MC}$ όπως θέλαμε να δείξουμε.

Έχουμε:

$$\angle KBM = 180^\circ - \angle BNP - \angle BPN = \angle MNC - \angle BPN = \angle MNC - \angle MPA$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από συμμετρία επειδή $\angle MPN = \angle KPN = \angle BPA$. Επειδή $\angle AMP = \angle CMN$ καταλήγουμε στο

$$\angle KBM = \angle MAN - \angle MCN$$

Έχουμε επίσης ότι:

$$\begin{aligned}\angle MDK &= 2\angle MDA = \angle MDA + \angle DMC + \angle MCD = \\ &= \angle MDA + \angle DMA + \angle MCD = 180^\circ - \angle MAD + \angle MCD = 180^\circ - \angle KBM\end{aligned}$$

Άρα το B ανήκει στον Απολλώνιο κύκλο και το ζητούμενο έπεται.