



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2019-B02

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Έστω θετικός ακέραιος $n \geq 3$ και σύνολο S θετικών ακεραίων με n στοιχεία. Ναδειχθεί ότι υπάρχει ένα προς ένα και επί συνάρτηση $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow S$ ώστε για κάθε $1 \leq i < j < k \leq n$ να ισχύει ότι $f(j)^2 \neq f(i)f(k)$.

Πηγή: Κορέα 2018

Προτεινόμενη Λύση 1

Έστω $p_1, p_2, \dots, p_n$ όλοι οι πρώτοι οι οποίοι διαιρούν κάποιο στοιχείο του S . Γράφουμε κάθε στοιχείο x του S στην μορφή $x = p_1^{r_1} \cdots p_n^{r_n}$ (επιτρέπεται κάποια r_i να είναι ίσα με 0) και αντιστοιχούμε σε αυτό το διάνυσμα $v_x = (r_1, \dots, r_n)$.

Έστω T το σύνολο αυτών των διανυσμάτων. Αρκεί να βρούμε ένα προς ένα και επί συνάρτηση $g : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow T$ ώστε για κάθε $1 \leq i < j < k \leq n$ να ισχύει ότι $2g(j) \neq g(i) + g(k)$.

Ισοδύναμα πρέπει να βάλουμε τα διανύσματα του T στην σειρά με τέτοιο τρόπο ώστε να μην υπάρχουν $u, v, w \in T$ με $u + w = 2v$ και το v να είναι ενδιάμεσα των u και w .

Επικεντρωνόμαστε αρχικά στην πρώτη συντεταγμένη και θα δείξουμε ότι μπορούμε να βάλουμε τα διανύσματα του T στην σειρά με τέτοιο τρόπο ώστε να μην υπάρχουν $u, v, w \in T$ με $u_1 + w_1 = 2v_1$ και το v να είναι ενδιάμεσα των u και w , εκτός και αν $u_1 = v_1 = w_1$. (Με u_i συμβολίζουμε την συντεταγμένη i του διανύσματος u .)

Ισοδύναμα, αν έχουμε ένα σύνολο A από διακεκριμένους μη αρνητικούς ακεραίους, πρέπει να τους βάλουμε στην σειρά ώστε να μην υπάρχουν τρεις, έστω οι a, b, c ώστε $2b = a + c$ και ο b να είναι ενδιάμεσα των a και c .

Αρκεί να δείξουμε το πιο πάνω για το $A' = \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$. (Για n αρκετά μεγάλο έχουμε $A \subseteq A'$. Αν κατασκευάσουμε σειρά για το A' μετά παίρνουμε την σειρά για το A απλά αγνοώντας τα στοιχεία του A' που δεν ανήκουν στο A .)

Θα δείξουμε το πιο πάνω με επαγωγή στο n . Για $n = 1$ το A' έχει μόνο δύο στοιχεία οπότε μπορούμε να τα βάλουμε με όποια σειρά θέλουμε. Έστω ότι μπορούμε να το

κάνουμε για $n = k$. Τα στοιχεία του A' είναι τα $0, 1, \dots, 2^k - 1$. Έστω

$$x_1, \dots, x_r$$

η σειρά που κατασκευάσαμε, όπου $r = 2^k$. Για $n = k + 1$ τα στοιχεία του A' είναι τα $0, 1, \dots, 2^{k+1} - 1$. Κάθε στοιχείο του A' ισούται με $2x_i$ ή $2x_i + 1$ για κάποιο $1 \leq i \leq r$. Παρατηρούμε τώρα ότι η σειρά

$$2x_1, \dots, 2x_r, 2x_1 + 1, \dots, 2x_r + 1$$

λειτουργεί σε αυτήν την περίπτωση.

Μπορούμε λοιπόν να βάλουμε τα διανύσματα του T στην σειρά με τέτοιο τρόπο ώστε να μην υπάρχουν $u, v, w \in T$ με $u_1 + w_1 = 2v_1$ και το v να είναι ενδιάμεσα των u και w , εκτός και αν $u_1 = v_1 = w_1$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι στοιχεία με την ίδια πρώτη συντεταγμένη βρίσκονται συνεχόμενα. Για κάθε ομάδα στοιχείων με την ίδια πρώτη συντεταγμένη επαναλαμβάνουμε το ίδιο αλλά για την δεύτερη συντεταγμένη, μετά για την τρίτη συντεταγμένη κ.ο.κ. Επειδή κάθε δύο διανύσματα διαφωνούν σε τουλάχιστον μία συντεταγμένη, στο τέλος της διαδικασίας τα διανύσματα θα μπουν στην σειρά όπως θέλαμε.

Προτεινόμενη Λύση 2

Έστω ότι δεν ισχύει το ζητούμενο. Από όλα τα S τα οποία αποτελούν αντιπαράδειγμα, παίρνουμε αυτό με το μικρότερο άθροισμα στοιχείων.

Ουσιαστικά αυτό που θέλουμε να πετύχουμε είναι να βάλουμε τα στοιχεία του S στην σειρά με τέτοιο τρόπο ώστε μεταξύ κάθε δυο στοιχείων x, y του S να μην υπάρχει το $\sqrt{xy}$.

Ονομάζουμε δυο στοιχεία x, y του S ταιριαστά μεταξύ τους, αν το xy είναι τέλειο τετράγωνο. Αν δυο στοιχεία του S δεν είναι ταιριαστά μεταξύ τους τότε σίγουρα το $\sqrt{xy}$ δεν θα ανήκει στο S αφού δεν θα είναι καν ακέραιος.

Παρατηρούμε ότι αν τα x, y είναι ταιριαστά μεταξύ τους και τα y, z είναι επίσης ταιριαστά μεταξύ τους, τότε και τα x, z θα είναι επίσης ταιριαστά μεταξύ τους. Πράγματι αν $xy = a^2$ και $yz = b^2$ τότε $xz = \left(\frac{ab}{y}\right)^2$. Δηλαδή το xz είναι τετράγωνο ρητού και αφού το xz είναι ακέραιος τότε θα είναι και τέλειο τετράγωνο.

Άρα μπορούμε να χωρίσουμε τα στοιχεία του S σε ομάδες ώστε σε κάθε ομάδα όλα τα στοιχεία να είναι ταιριαστά ανά δύο, ενώ στοιχεία διαφορετικών ομάδων να μην είναι ταιριαστά μεταξύ τους. Αν έχουμε περισσότερες από μία ομάδες, από την υπόθεση ότι το S είναι το ελάχιστο αντιπαράδειγμα, μπορούμε να επιτύχουμε το ζητούμενο σε κάθε ομάδα ξεχωριστά. Τότε όμως μπορούμε να πετύχουμε το ζητούμενο και στο S βάζοντας αρχικά τα στοιχεία της πρώτης ομάδας στην σειρά, μετά της δεύτερης κ.ο.κ.

Μπορούμε να υποθέσουμε λοιπόν ότι όλα τα στοιχεία του S είναι ταιριαστά μεταξύ τους. Έστω $x_1, \dots, x_n$ τα στοιχεία του S . Για κάθε $1 \leq i \leq n$ γράφουμε $x_i = a_i(b_i)^2$

όπου το r_i είναι γινόμενο διακεκριμένων πρώτων. Τότε πρέπει $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Ορίζουμε τώρα $S' = \{b_1, \dots, b_n\}$. Το S' έχει μικρότερο άθροισμα στοιχείων από το S και άρα μπορούμε να βάλουμε τα στοιχεία του στην σειρά ώστε να ικανοποιείται το ζητούμενο. Τότε όμως η ίδια σειρά κάνει και για το S .

Καταλήξαμε σε άτοπο, οπότε δεν υπάρχει ελάχιστο αντιπαράδειγμα και το ζητούμενο ισχύει για όλα τα σύνολα S .

