



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2019-B03

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρεθούν όλα τα ζεύγη μη αρνητικών ακεραίων (m, n) για τα οποία:

$$m^2 + 2 \cdot 3^n = m(2^{n+1} - 1).$$

Πηγή: IMO Shortlist 2010

Προτεινόμενη Λύση

Παρατηρούμε ότι $m|2 \cdot 3^n$ οπότε $m = 3^k$ ή $m = 2 \cdot 3^k$ για κάποιο $k \leq n$. Αν $m = 3^k$, αντικαθιστώντας καταλήγουμε στην:

$$3^k + 2 \cdot 3^{n-k} = 2^{n+1} - 1$$

Αν $m = 2 \cdot 3^k$ καταλήγουμε στην:

$$2 \cdot 3^k + 3^{n-k} = 2^{n+1} - 1$$

Και οι δύο εξισώσεις είναι της μορφής:

$$2 \cdot 3^r + 3^s = 2^{r+s+1} - 1$$

Για $r + s \geq 2$, το δεξί μέλος είναι ισότιμο με $-1 \pmod{8}$. Ο μόνος τρόπος να είναι το αριστερό μέλος ισότιμο με $-1 \pmod{8}$ είναι το r να είναι περιττός και το s άρτιος. Τότε το $r + s + 1$ είναι άρτιος, έστω $r + s + 1 = 2t$. Από το λήμμα Lifting the Exponent (δείτε την λύση του προβλήματος [OLY2017-B25](#)) έχουμε

$$v_3(2^{r+s+1} - 1) = v_3(4^t - 1) = 1 + v_3(t)$$

Ας γράψουμε $a = \min(r, s)$ και $b = \max(r, s)$. Επειδή $r \neq s$ έχουμε $a = 1 + v_3(t)$. Δηλαδή $3^a \leq 3t$. Τότε όμως είναι $3^b \geq \frac{3^{a+b-1}}{t}$. Άρα:

$$2^{a+b+1} = 2^{n+1} > 2 \cdot 3^r + 3^s > 3^b \geq \frac{3^{a+b-1}}{t} = \frac{2 \cdot 3^{a+b-1}}{a+b+1}$$

Είναι εύκολο όμως να δειχθεί επαγωγικά ότι

$$\left(\frac{3}{2}\right)^N \geq 3(N+1)$$

για κάθε φυσικό $N \geq 9$. Πρέπει λοιπόν $a+b \leq 8$. Για $a+b \geq 2$ έχουμε ήδη δει ότι ο ένας αριθμός είναι άρτιος και ο άλλος περιττός. Οπότε μένει να εξετάσουμε τα ζεύγη (a, b) της μορφής

$$(0, 0), (0, 1), (0, 3), (0, 5), (0, 7), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 3), (2, 5), (3, 4)$$

Για $a+b \geq 2$ πρέπει επίσης να έχουμε $a = 1 + v_3(t) = 1 + v_3\left(\frac{a+b+1}{2}\right)$. Από αυτήν την συνθήκη απορρίπτονται άμεσα αρκετά ζεύγη και μας μένουν τα

$$(0, 0), (0, 1), (1, 2), (1, 6), (2, 3)$$

Τα ελέγχουμε ένα προς ένα και βρίσκουμε τις λύσεις $r=1, s=2, n=3$ για το ζεύγος $(1, 2)$ και $r=3, s=2, n=5$ για το ζεύγος $(2, 3)$. Το $a=1, b=2$ δίνει τις λύσεις $m=6, n=3$ και $m=9, n=3$. Το $a=2, b=3$ δίνει τις λύσεις $m=9, n=5$ και $m=54, n=5$.