



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2019-B12

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Σε κάθε κελί ενός $n \times n$ πίνακα έχει τοποθετηθεί μία συνάρτηση από το $[0, 1]$ στο $[0, 1]$. Ναδειχθεί ότι υπάρχουν $2n$ συναρτήσεις από το $[0, 1]$ στο $[0, 1]$, μια για κάθε σειρά και κάθε στήλη του πίνακα ώστε να ισχύει το εξής:

Αν h είναι μια συνάρτηση ενός κελιού του πίνακα, f η συνάρτηση της στήλης του και g η συνάρτηση της σειράς του, τότε $h(x) = f(g(x))$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Πηγή: Μαθηματική Ολυμπιάδα Καυκάσου 2018

Προτεινόμενη Λύση

Έστω h_{ij} η συνάρτηση στο κελί (i, j) .

Για τις στήλες ορίζουμε τις συναρτήσεις $g_1, g_2, \dots, g_n$ αυθαίρετα ώστε να έχουν διαφορετικά πεδία τιμών. Π.χ. ορίζοντας $g_j(x) = \frac{x + 2j}{2n + 1}$.

Για τις σειρές ορίζουμε τις συναρτήσεις $f_1, \dots, f_n$ ως εξής:

Αν $x = g_j(y)$ για κάποιο $y \in [0, 1]$ τότε ορίζουμε $f_i(x) = h_{ij}(y)$. Αυτό είναι καλώς ορισμένο επειδή για κάθε x υπάρχει το πολύ ένα ζεύγος (j, y) ώστε $x = g_j(y)$. Αν $x \in [0, 1]$ αλλά δεν υπάρχει ζεύγος (j, y) ώστε $x = g_j(y)$ τότε ορίζουμε $f_i(x)$ αυθαίρετα. Π.χ. $f_i(x) = 0$.

Οι συναρτήσεις που επιλέξαμε προφανώς ικανοποιούν το ζητούμενο αφού για κάθε $y \in [0, 1]$ και κάθε i, j είναι $f_i(g_j(y)) = h_{ij}(y)$.