



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2019-B14

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να εξεταστεί αν υπάρχει θετικός ακέραιος $N > 10^{20}$ ώστε όλα του τα ψηφία να είναι περιττά, κάθε ένα από τα ψηφία 1, 3, 5, 7, 9 να εμφανίζεται το ίδιο πλήθος φορών στην δεκαδική αναπαράσταση του N και επίσης να διαιρείται από κάθε 20-ψήφιο αριθμό ο οποίος προκύπτει από τον N με διαγραφή κάποιων ψηφίων του.

Πηγή: Tuymaada 2016

Προτεινόμενη Λύση

Θα δείξουμε ότι υπάρχει και μάλιστα διαιρείται από όλους τους 20-ψήφιους αριθμούς με περιττά ψηφία.

Έστω $n_1, n_2, \dots, n_r$ όλοι οι 20-ψήφιοι αριθμοί με περιττά ψηφία. Έστω επίσης m_i (για $1 \leq i \leq r$) ο ακέραιος αριθμός που προκύπτει από τον n_i διαιρώντας με τη μέγιστη δυνατή δύναμη του 5. Τέλος, έστω k μέγιστο ώστε ο 5^k να διαιρεί τους $n_1, \dots, n_r$.

Αρκεί να βρούμε θετικό ακέραιο $N > 10^{20}$ ώστε όλα του τα ψηφία να είναι περιττά, κάθε ένα από τα ψηφία 1, 3, 5, 7, 9 να εμφανίζεται το ίδιο πλήθος φορών στην δεκαδική αναπαράσταση του N και επίσης να διαιρείται από τον αριθμό $5^k m_1 m_2 \cdots m_r$.

Ξεκινάμε από έναν 20-ψήφιο αριθμό N_1 με περιττά ψηφία ο οποίος διαιρείται από το 5^k . Τοποθετώντας επιπλέον ψηφία στην αρχή αν χρειαστεί παίρνουμε έναν αριθμό N_2 με περιττά ψηφία ο οποίος διαιρείται από το 5^k και επίσης κάθε ένα από τα ψηφία 1, 3, 5, 7, 9 εμφανίζεται το ίδιο πλήθος φορών στην δεκαδική αναπαράσταση του N_2 .

Έστω $M = m_1 m_2 \cdots m_r$. Προφανώς, $(M, 10) = 1$. Θεωρούμε τώρα τους αριθμούς $N_2, \overline{N_2 N_2}, \overline{N_2 N_2 N_2}, \dots$ όπου ο n -οστός από αυτούς τους αριθμούς προκύπτει τοποθετώντας n αντίγραφα του N_2 το ένα δίπλα από το άλλο. Από την αρχή του περιστερών, δύο από αυτούς τους αριθμούς είναι ισότιμοι modulo . Αφαιρώντας τους παίρνουμε έναν αριθμό N_3 της μορφής $\overline{N_2 \cdots N_2} 0 \cdots 0$ ο οποίος είναι πολλαπλάσιος του M . Προφανώς είναι και πολλαπλάσιος του N_2 και άρα και του 5^k . Αγνοώντας τα τελικά μηδενικά του N_3 παίρνουμε έναν αριθμό N ο οποίος έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.