



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2019-B18

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί n για τους οποίους το $2^{n-1} + 1$ είναι πολλαπλάσιο του n .

Προτεινόμενη Λύση

Σίγουρα το $n = 1$ ικανοποιεί το ζητούμενο. Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχουν άλλοι τέτοιοι φυσικοί. Επειδή, για $n > 1$ ο $2^{n-1} + 1$ είναι περιττός, τότε και ο n πρέπει να είναι περιττός. Γράφουμε $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ ως γινόμενο πρώτων παραγόντων. Επειδή κάθε p_i είναι περιττός, υπάρχουν φυσικοί $m_1, \dots, m_k$ και περιττοί φυσικοί $t_1, \dots, t_k$ ώστε $p_i = 1 + 2^{m_i} t_i$ για κάθε i . Έστω $m = \min \{m_1, \dots, m_k\}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας είναι $m = m_1$. Έχουμε $p_i \equiv 1 \pmod{2^m}$ για κάθε i , οπότε και $n \equiv 1 \pmod{2^m}$. Έστω $n = 1 + 2^m t$.

Επειδή $p|n$ έχουμε $2^{n-1} \equiv -1 \pmod{p}$ άρα και $2^{2^{m-1}t} \equiv -1 \pmod{p}$. Επειδή ο t_1 είναι περιττός έχουμε και

$$\left(2^{(2^m t)}\right)^{t_1} \equiv (-1)^{t_1} \equiv -1 \pmod{p}$$

Όμως

$$\left(2^{(2^m t)}\right)^{t_1} = 2^{2^m t t_1} = \left(2^{(2^m t_1)}\right)^t = 2^{(p-1)t} \equiv 1 \pmod{p}$$

από το μικρό θεώρημα του Fermat. Αυτό όμως είναι αδύνατο αφού $p \neq 2$.