



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2019-B19

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρεθεί ο μικρότερος θετικός ακέραιος n ώστε να μπορούμε σε κάθε κελί ενός 18×18 πίνακα να τοποθετήσουμε έναν από τους αριθμούς $1, 2, \dots, n$ ώστε:

- (α) Κάθε αριθμός να εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά σε κάποιο κελί.
- (β) Σε κάθε σειρά και σε κάθε στήλη να μην υπάρχουν κελιά των οποίων οι αριθμοί να είναι ίσοι ή διαδοχικοί.

Πηγή: Ιράν 2018

Προτεινόμενη Λύση

Έστω ότι ο αριθμός k τοποθετήθηκε a_k φορές. Πρέπει $a_k + a_{k+1} \leq 18$ αφού όλες οι εμφανίσεις των αριθμών k και $k+1$ πρέπει να είναι σε διαφορετικές στήλες. Τότε:

$$(a_1 + a_2) + \dots + (a_{33} + a_{34}) \leq 17 \cdot 18 < 18^2$$

Άρα αναγκαστικά πρέπει $n \geq 35$. Επίσης

$$(a_1 + a_2) + \dots + (a_{35} + a_{36}) \leq 18^2$$

Αν $n \leq 36$ τότε πρέπει να ισχύει η ισότητα στην πιο πάνω σχέση. Πρέπει $a_1 + a_2 = 18$ και οι άσοι να βρίσκονται στις στήλες όπου δεν υπάρχουν δυάρια. Επίσης, $a_2 + a_3 \leq 18$ με τα τριάρια να βρίσκονται σε κάποιες από τις στήλες όπου δεν υπάρχουν δυάρια. Άρα $a_3 \leq a_1$ με όλες τις στήλες που έχουν τριάρια να έχουν και άσους.

Ομοίως $a_{35} \leq a_{33} \leq \dots \leq a_1$ και κάθε στήλη που έχει 35 έχει επίσης και κάθε άλλο περιττό αριθμό. Άρα αυτή η στήλη έχει ακριβώς τους αριθμούς $1, 3, \dots, 35$.

Επίσης από την $a_{35} \leq a_{33} \leq \dots \leq a_1$ και αφού $a_1 + a_2 = \dots = a_{35} + a_{36} = 18$ τότε έχουμε και $a_{36} \geq a_{34} \geq \dots \geq a_2$ και με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι η γραμμή που περιέχει το 2 περιέχει ακριβώς τους αριθμούς $2, 4, \dots, 36$.

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε μια στήλη που περιέχει μόνο περιττούς αριθμούς και μια γραμμή που περιέχει μόνο άρτιους αριθμούς, άτοπο.

Άρα πρέπει $n \geq 37$. Για $n = 37$ μπορεί να γίνει ως εξής:

Χωρίζουμε τον πίνακα σε τέσσερις 9×9 πίνακες. Στον άνω αριστερά τοποθετούμε τους αριθμούς $1, 3, \dots, 17$ ώστε κάθε ένας από αυτούς να εμφανίζεται από μία φορά σε κάθε γραμμή και στήλη του. Στον άνω δεξιά τοποθετούμε με τον ίδιο τρόπο τους $20, 22, \dots, 36$, στον κάτω αριστερά τους $21, 23, \dots, 37$ και στον κάτω δεξιά τους $2, 4, \dots, 18$.

Η μόνο συνθήκη που δεν ικανοποιείται μέχρι στιγμής είναι ότι δεν εμφανίζεται καθόλου ο 19. Θα τροποποιήσουμε τον πιο πάνω πίνακα ώστε να εμφανιστεί και ο 19 χωρίς να χαλάσουν οι υπόλοιπες συνθήκες. Μπορούμε να κανονίσουμε στην αρχική κατασκευή ώστε τα άνω αριστερά στοιχεία των τεσσάρων 9×9 πινάκων είναι τα 17, 36, 37, 18. Αλλάζουμε αυτά τα στοιχεία σε 37, 18, 19, 37 αντίστοιχα. Τώρα εμφανίζονται όλοι οι αριθμοί. Επίσης το νέο 37 στον άνω αριστερά πίνακα δεν παραβιάζει καμιά νέα συνθήκη. Το μόνο πιθανό πρόβλημα είναι το 36 στη σειρά του και το 37 στη στήλη του τα οποία όμως έχουν αλλάξει σε 18 και 19 αντίστοιχα. Ομοίως ελέγχουμε ότι ούτε και οι υπόλοιπες αλλαγές παραβιάζουν τις συνθήκες.