



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2019-B20

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Έστω πραγματικός αριθμός $x \geq 1$ και φυσικός αριθμός n ώστε οι $\lfloor x^{n+1} \rfloor, \lfloor x^{n+2} \rfloor, \dots, \lfloor x^{4n} \rfloor$ να είναι όλοι τέλεια τετράγωνα.

Να δειχθεί ότι και ο $\lfloor x \rfloor$ είναι τέλειο τετράγωνο.

Πηγή: Ιταλία 2019

Προτεινόμενη Λύση

Έστω $\lfloor x^{2n} \rfloor = m^2$. Τότε $m^2 \leq x^{2n} < m^2 + 1$ άρα και $m^4 \leq x^{4n} < (m^2 + 1)^2$. Αφού όμως ο $\lfloor x^{4n} \rfloor$ είναι τέλειο τετράγωνο, πρέπει $\lfloor x^{4n} \rfloor = m^4$. Άρα ισχύει ότι $x^{4n} < m^4 + 1$

Τότε έχουμε:

$$m^3 \leq x^{3n} < \frac{m^4 + 1}{x^n} \leq \frac{m^4 + 1}{m} < m^3 + 1$$

Άρα $\lfloor x^{3n} \rfloor = m^3$ οπότε το m είναι τέλειο τετράγωνο.

Επειδή $m^2 \leq x^{2n} < m^2 + 1$, τότε:

$$m \leq x^n < \frac{m^2 + 1}{x^n} \leq \frac{m^2 + 1}{m} < m + 1$$

Άρα ο $\lfloor x^n \rfloor = m$ είναι τέλειο τετράγωνο.

Έχουμε λοιπόν δείξει ότι αν οι $\lfloor x^{n+1} \rfloor, \lfloor x^{n+2} \rfloor, \dots, \lfloor x^{4n} \rfloor$ είναι τέλεια τετράγωνα, τότε και οι $\lfloor x^n \rfloor, \lfloor x^{n+1} \rfloor, \dots, \lfloor x^{4(n-1)} \rfloor$ είναι επίσης τέλεια τετράγωνα. Επαγωγικά καταλήγουμε στο ότι και οι $\lfloor x^2 \rfloor, \lfloor x^3 \rfloor, \lfloor x^4 \rfloor$ είναι τέλεια τετράγωνα. Άρα και ο $\lfloor x \rfloor$ είναι τέλειο τετράγωνο.