



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2021-A01

Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$f(2x + f(y)) = x + y + f(x)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Πηγή: Αυστρία 2019

Προτεινόμενη Λύση

Αν $f(y_1) = f(y_2)$ τότε

$$x + y_1 + f(x) = f(2x + f(y_1)) = f(2x + f(y_2)) = x + y_2 + f(x)$$

επομένως $y_1 = y_2$. Δηλαδή η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα.

Για $x = -y$ παίρνουμε

$$f(-2y + f(y)) = -y + y + f(-y) = f(-y)$$

Αφού η συνάρτηση είναι ένα προς ένα τότε $-2y + f(y) = -y$. Καταλήγουμε στο $f(y) = y$ το οποίο ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$.