



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

Κωδικός: OLY2021-A03

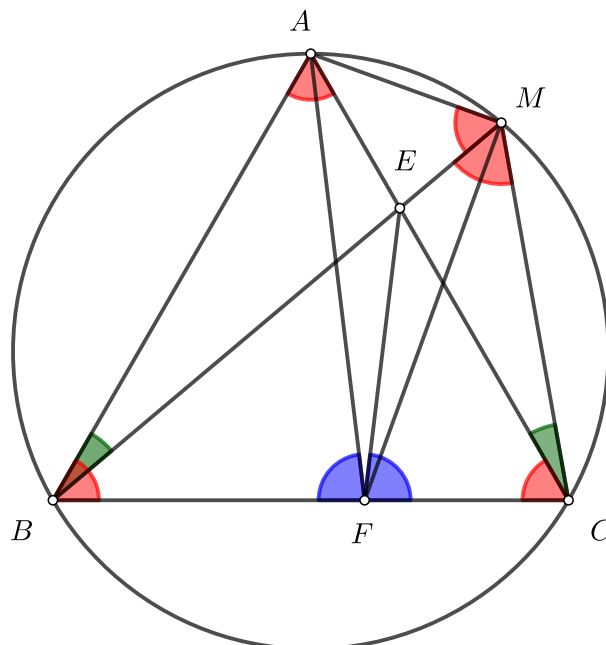
Επιμέλεια: Δημήτρης Χριστοφίδης

Πρόβλημα

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\triangle ABC$ με $AB = AC$. Έστω ω ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC και $M \neq A, C$ σημείο του τόξου AC του ω το οποίο δεν περιέχει το B . Έστω E το σημείο τομής της BM με την AC και έστω F το σημείο τομής της διχοτόμου της γωνίας $\angle BMC$ με την BC . Αν $\angle AFB = \angle CFE$ ναδειχθεί ότι το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο.

Πηγή: Τουρκία 2019

Προτεινόμενη Λύση



Τα τρίγωνα ABF και ECF είναι όμοια αφού $\angle AFB = \angle CFE$ και $\angle ABF = \angle ECF$.

Άρα

$$\frac{AB}{EC} = \frac{BF}{CF} = \frac{BM}{CM}$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποίησαμε το θεώρημα των διχοτόμων.

Επειδή τώρα $\frac{AB}{BM} = \frac{EC}{CM}$ και επιπλέον

$$\angle ABM = \angle ACM = \angle ECM$$

τότε τα τρίγωνα ABM και ECM είναι όμοια.

Έτσι έχουμε

$$\angle ACB = \angle AMB = \angle EMC = \angle BMC = \angle BAC$$

